U obrazovanju učitelja podučavanje matematičkih pojmova zahteva posebnu pažnju. Cilj ovog rada je predstavljanje Moodle kursa koji je usmeren na razumevanje pojma funkcije, pružajući interaktivno okruženje za učenje uz integrisanu primenu dinamičkog matematičkog softvera GeoGebra. Modularna struktura kursa i zadaci koji se međusobno nadovezuju, uz trenutne povratne informacije, omogućavaju postepeno usvajanje znanja, proces formiranja pojmova i vežbanje. Kurs pruža priliku za eksperimentisanje i analizu primera, čime se podstiče aktivno i samostalno učenje.
Ključne reči: funkcija, Moodle kurs, GeoGebra, interaktivno učenje

A tanítóképzésben a matematikai fogalmak tanítása különös figyelmet igényel. A tanulmány célja egy olyan Moodle-kurzus bemutatása, amely támogatja a függvény fogalmának megértését, interaktív tanulási környezetet kínálva a GeoGebra dinamikus matematikai szoftver integrált alkalmazásával. A kurzus moduláris felépítése és egymásra épülő feladatai, valamint az azonnali visszajelzés lehetősége fokozatos ismeretszerzést, fogalomalkotási folyamatot és gyakorlást tesznek lehetővé. A kurzus kísérletezésre és példák elemzésére ad lehetőséget, ezáltal ösztönözve az aktív és önálló tanulást.
Kulcsszavak: függvény, Moodle kurzus, GeoGebra, interaktív tanulás

In teacher education, teaching mathematical concepts requires special attention. The aim of this study is to present a Moodle course designed to support the understanding of the concept of a function, providing an interactive learning environment with the integrated use of the dynamic mathematical software GeoGebra. The modular structure of the course and its interconnected tasks, along with instant feedback, enable the gradual acquisition of knowledge, concept formation, and practice. The course offers opportunities for experimentation and analysis of examples, thereby encouraging active and independent learning.
Keywords: function, Moodle course, GeoGebra, interactive learning

Módszertani Közlöny 2024, XIV. évfolyam, 1. szám
Újvidéki Egyetem
Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar
ETO: 004.42GEOGEBRA:517.5 ; 004.42MOODLE:517.5
https://doi.org/10.18485/uns_modszer.2024.14.1.5
Eredeti tudományos munka
A leadás időpontja: 2024.11.03.
Az elfogadás időpontja: 2024.12.29.
Terjedelem: 70–92.

RAZVOJ POJMA FUNKCIJE U OBRAZOVANJU UČITELJA UZ POMOĆ GEOGEBRA ALATA U MOODLE OKRUŽENJU

The development of the concept of function in teacher education using the GeoGebra tool in Moodle environment

A funkció fogalmának fejlesztése a tanítóképzésben a GeoGebra eszköz segítségével a Moodle környezetben

Sörfőző Szügyi Judit
Učiteljski Fakultet na mađarskom nastavnom jeziku, Univerzitet u Novom Sadu, Subotica, asistent
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, doktorska škola matematike, 2. godina
judit.sorfozo.szugyi@magister.uns.ac.rs

Uvod

Digitalizacija obrazovanja i primena savremenih pedagoških metoda uneli su značajne promene u nastavu matematičkih pojmova. Naročito predavanje apstraktnih pojmova zahteva nove pristupe koji pomažu učenicima da teorijska znanja primene u praksi. Učenici često teško razumeju matematičku simboliku, kao i vezu između apstraktnih pojmova i njihove svakodnevne primene. Interaktivni alati poput GeoGebra i Moodle platforme omogućavaju učenicima dinamičko istraživanje matematičkih veza, dok istovremeno proces učenja čine prilagodljivijim i motivišućim (Zöchbauer i saradnici, 2021; Weinhandl i saradnici, 2020).

Model „flipped classroom" ili „prevrnuta učionica" predstavlja inovativan pristup koji preokreće tradicionalni proces učenja. U ovom sistemu, učenici samostalno savladavaju nastavni materijal – na primer, putem online video-zapisa ili interaktivnih nastavnih sadržaja – dok se vreme u učionici koristi za aktivne aktivnosti učenja, kao što su grupni rad, rešavanje problema i vežbe za dublje razumevanje (Weinhandl i saradnici, 2020). Ovaj pristup se posebno dobro uklapa sa primenom GeoGebra alata, koji omogućava učenicima dublje konceptualno razumevanje matematičkih pojmova kroz različite reprezentacije – grafičke, algebarske i tabelarne (Hohenwarter i Fuchs, 2004).

Tall-ov model tri sveta nudi dodatni teorijski okvir za razumevanje procesa učenja. Ovaj model opisuje prelaze između čulnog, simboličkog i formalnog sveta, pri čemu učenici, oslanjajući se na vizuelnu intuiciju, napreduju ka apstrakciji. Tehnologije poput GeoGebra platforme pružaju mogućnost da učenici istovremeno dožive vizuelni i formalni matematički svet, čime se olakšava razumevanje veza između pojmova (Tall, 2013).

Integracija GeoGebra Classroom i Moodle platforme otvara nove mogućnosti za nastavu sadržaja o funkciji. GeoGebra nudi dinamičke alate za vizualizaciju apstraktnih pojmova, dok Moodle pruža prilagodljivo online okruženje za samostalno učenje i trenutne povratne informacije (Zöchbauer i saradnici, 2021; Weinhandl i saradnici, 2021). Pierce i Stacey-jeva „pedagoška mapa" pokazuje kako ovakvi alati poboljšavaju nastavu matematike: omogućavaju brže proračune, složene vizualizacije i zadatke zasnovane na realnim podacima. Na taj način ne samo da povećavaju aktivnu uključenost učenika već i podstiču dublje razumevanje matematičkih veza, poput povezivanja grafičkih i simboličkih reprezentacija funkcija (Pierce i Stacey, 2010).

Cilj ove studije je predstavljanje kursa pod nazivom „Pojam funkcije i njene osobine", izgrađenog u Moodle okruženju, koji može poslužiti kao dopuna klasičnim oblicima nastave ili podrška inovativnom modelu „prevrnute učionice". Kurs podstiče aktivnu uključenost studenata u proces učenja, omogućavajući im da eksperimentišu, rade sopstvenim tempom i usvajaju pojam funkcije kroz vizuelna i praktična iskustva. Kurs je zasnovan na istraživanju koje je proučavalo metodologiju predavanja o funkcijama u srednjoškolskom okruženju (Szügyi, 2011), i obogatilo je izradu nastavnog materijala idejama i metodološkim pristupima.

Struktura kursa „Pojam funkcije i njene osobine"

Kurs se sastoji iz tri modula, koja se nadovezuju jedan na drugi i u kojima osam interaktivnih testova *(Slika 1)* vode studente da kroz eksperimentisanje i analizu brojnih primera:

- otkriju pojam funkcije, tj. da pronalaze opšte karakteristike koje razlikuju funkcije od relacija
- uvežbavaju prepoznavanje funkcija u skupu relacija
- uvežbavaju prepoznavanje grafika funkcija realnih argumenata u skupu pravih ili krivih linija
- povezuju načine zadavanja funkcija
- otkriju pojam sirjektivne, injektivne i bijektivne funkcije
- uvežbavaju prepoznavanje spomenutih funkcija u skupu relacija.


Pregled teme

Definicija i osobine funkcije

Forum vesti

1 **Definicija funkcije**

Šta su funkcije?

TEST 01 - Funkcije i relacije

Lekcija "Definicija funkcije"

Definicija funkcije

Kako možemo zadati funkciju ako su domen i kodomen funkcije konačni skupovi?

TEST 02 - Prepoznati funkciju

U ovom folderu možete naći korišćene GeoGebra fajlove:

Definicija funkcije - GeoGebra
mathe-online.at

2 **Grafik funkcije**

Kako možemo zadati funkciju ako je domen funkcije beskonačan skup?

TEST03 - Pravilo pridruživanja1
TEST04 - Pravilo pridruživanja2

Da li je svaka prava ili kriva linija grafik neke funkcije?

TEST05 - Pravilo pridruživanja3
TEST06 - Prepoznati grafike funkcija

3 **Osobine funkcije**

Šta su injektivne, sirjektive i bijektivne funkcije?

TEST07: Osobine funkcije

Kako možemo prepoznati osobinu injektivnosti, sirjektivnosti i bijektivnosti na datim funkcijama?

TEST08: Prepoznati osobine funkcija

Struktura kursa u Moodle okruženju *(Slika 1)*

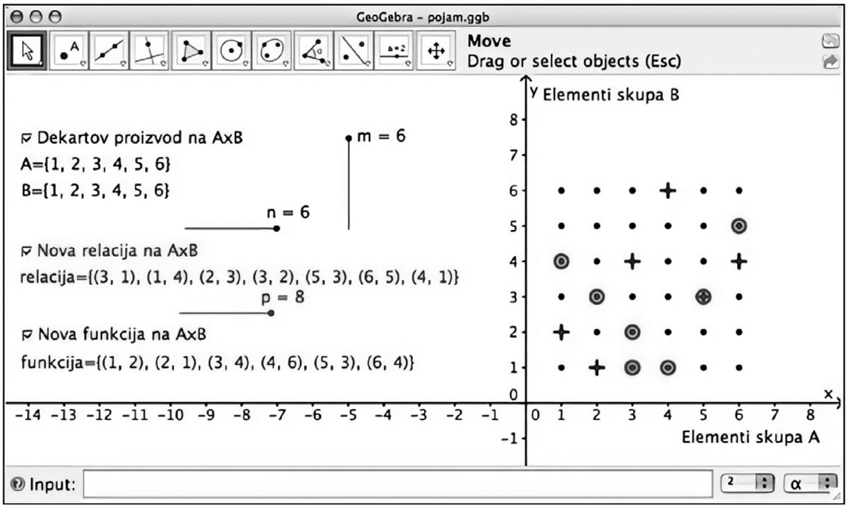
Definicija funkcije - šta su funkcije?

Studentima je već poznato da relacija ρ iz skupa *A* u skup *B*, kao podskup Dekartovog proizvoda *A*×*B*, može biti zadata pomoću nabrajanja uređenih parova koji pripadaju relaciji. Znaju da svakom uređenom paru realnih brojeva odgovara tačno jedna tačka ravni i obrnuto. Dakle u Dekartovom kordinatnom sistemu svaka relacija može biti prikazana skupom tačaka ravni. Ove poznate činjenice su iskorišćene u TEST01: Definicija funkcije *(Tabela 1)* da bi kroz individualno eksperimentisanje studenti otkrili pojam funkcije.

Nakon otvaranja testa dobijaju instrukciju *(Slika 2)*: „Videćete Dekartov proizvod skupa *A i B*, podskupova prirodnih brojeva, prikazan u koordinatnom sistemu kao skup tačaka ravni. Imate mogućnost podešavanja kardinalnog broja skupa *A* i *B* pomeranjem odgovarajućih klizača *m i n*, i možete pratiti kako se menja njihov Dekartov proizvod. Uključivanjem opcije „Nova relacija na A×B" i „Nova funkcija na A×B" možete posmatrati slučajno generisane relacije i funkcije iz datog skupa *A* u dati skup *B*, nabrajanjem uređenih parova i prikazivanjem odgovarajućeg skupa tačaka ravni. Pomeranjem klizača *p* možete podešavati maksimalan broj uređenih parova koji pripadaju relaciji."

Instrukcija nakon otvaranja testa TEST01 *(Slika 2)*

Kada započnu test otvara se GeoGebra fajl *(Slika 3)*, i studenti vide Dekartov proizvod skupa *A* i *B*, prikazanog u koordinatnom sistemu kao skup tačaka ravni. Da bi studenti posmatrali ono što je bitno, tj. osobine koje važe za funkcije ali ne moraju da važe za relacije, vodimo ih kroz 5 pitanja tipa tačno/netačno.



Izgled GeoGebra fajla testa TEST01 (Slika 3)

Nakon predaje testa, analiza se automatski izvršava i pored svakog pitanja pojavljuju se informacije o tačnosti ili netačnosti odgovora, kao i unapred programirana povratna informacija.

Varirajte *m*, *n i p* vrednosti i odredite da li su tačni sledeći iskazi!			
Iskaz	Tačan odgovor	Povratna informacija za "Tačno"	Povratna informacija za "Netačno"
Funkcije su relacije.	Tačno	Doneli ste dobar zaključak, funkcije su relacije jer su podskupovi Dekartovog proizvoda dva skupa.	Podsetite se na definiciju relacije, da li prikazane funkcije zadovoljavalju isti kriterijum?

Element skupa *A* može biti u relaciji samo sa jednim elementom skupa *B*	Netačno	Posmatrajte još malo. Ako tražite nove relacije iz *A* u *B* može da se desi, da se neki element skupa *A* pojavljuje više puta kao prvi element uređenih parova koji pripadaju relaciji.	Dobro ste zapazili.
Ako relacija na *A*×*B* jeste funkcija, element skupa *A* može biti u relaciji samo sa jednim elementom skupa *B*.	Tačno	Dobro ste zapazili.	Posmatrajte još malo. Bilo koliko puta tražite nove funkcije iz *A* u *B*, ne može da se desi, da se neki element skupa A pojavljuje više puta kao prvi element uređenih parova koji pripadaju funkciji.
Svaki elment skupa *A* mora biti u relaciji sa nekim elementom skupa *B*.	Netačno	Posmatrajte još malo. Ako tražite nove relacije iz *A* u *B* može da se desi, da se neki element skupa *A* ne pojavljuje kao prvi element uređenih parova koji pripadaju relaciji.	Dobro ste zapazili.
Ako relacija na *A*×*B* jeste funkcija, svaki elment skupa *A* mora biti u relaciji sa nekim elementom skupa *B*.	Tačno	Dobro ste zapazili.	Posmatrajte još malo. Bilo koliko puta tražite nove funkcije iz *A* u *B*, svi elementi skupa *A* se uvek pojavljuju kao prvi elementi uređenih parova koji pripadaju funkciji.

TEST01: Definicija funkcije (Tabela 1)

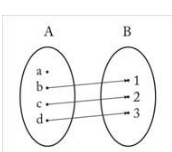
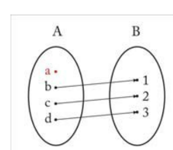
Dok studenti stignu do kraja testa opazili su bitne karakteristike funkcije, pa možemo dati formalnu definiciju i korišćene oznake zabeležene u lekciji „Definicija funkcije".

Kako možemo zadati funkciju ako su domen i kodomen funkcije konačni skupovi?

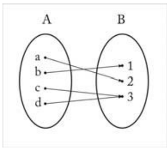
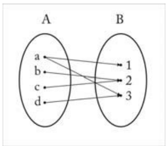
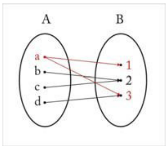
Studentima je poznato da relacija može biti zadata nabrajanjem uređenih parova koji pripadaju relaciji ili Ven-dijagramom gde uređeni par *(a,b)* predstavlja strelica iz elementa *a* u element *b*. Pošto smo konstatovali da su funkcije relacije ako su skupovi *A* i *B* konačni skupovi, tada i funkcija $f{:}A\rightarrow B$ može biti zadata na isti način kao i relacije iz skupa *A* u skup *B*.

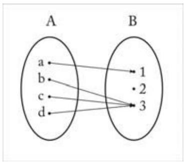
Cilj sledećeg testa TEST02: Prepoznati funkciju (Tabela 2) je da studenti shvate i uvežbaju kako se prepoznaju funkcije u skupu relacija, ako su relacije zadate nabrajanjem uređenih parova ili Ven-dijagramom

Nakon otvaranja testa studenti dobijaju kratke instrukcije o popunjavanju testa i podsetnik o osobinama koje moraju da važe za relacije da bi bile funkcije. Konstrukcija testa je slična prethodnom sa nekoliko razlika: u ovom slučaju svakom pitanju pripada statična ilustracija, i test je tipa višestrukog izbora.

<table>
<tr><td colspan="3">Relacije ρ iz $A\times B$, gde je $A=\{a, b, c, d\}$ i $B=\{1, 2, 3\}$ date su Ven-dijagramima ili nabrajanjem uređenih parova koje pripadaju relaciji.
Odrediti koji su tačni od sledećih iskaza:
• osobina1 je zadovoljena (Jedan element skupa A može da bude u relaciji sa najviše jednim elementom skupa B)
• osobina2 je zadovoljena (Svaki element skupa A mora da bude u relaciji sa nekim elementom skupa B)
• relacija je funkcija</td></tr>
<tr><td>Zadatak</td><td>Ponuđeni odgovor (tačnost)</td><td>Povratna informacija</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Osobina 1 je zadovoljena (tačno)</td><td rowspan="3">

Element $a \in A$ se ne preslikava u neki element skupa B, znači osobina2 nije zadovoljena, tj. prikazana relacija nije funkcija.</td></tr>
<tr><td>Osobina 2 je zadovoljena (netačno)</td></tr>
<tr><td>Relacija je funkcija (netačno)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Osobina 1 je zadovoljena (tačno)</td><td rowspan="3">Zadata relacija jeste funkcija. Primetite, da je moguće da se više elemenata skupa A preslikava u isti element skupa B.</td></tr>
<tr><td>Osobina 2 je zadovoljena (tačno)</td></tr>
<tr><td>Relacija je funkcija (tačno)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Osobina 1 je zadovoljena (netačno)</td><td rowspan="3">

Element $a \in A$ se preslikava u dva elementa skupa B, znači osobina1 nije zadovoljena, tj. prikazana relacija nije funkcija.</td></tr>
<tr><td>Osobina 2 je zadovoljena (tačno)</td></tr>
<tr><td>Relacija je funkcija (netačno)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Osobina 1 je zadovoljena (tačno)</td><td rowspan="3">Zadata relacija jeste funkcija. Primetite, da je moguće da se u neki element skupa B ne preslikava ni jedan element skupa A i da se više elemenata skupa A preslikava u isti element skupa B.</td></tr>
<tr><td>Osobina 2 je zadovoljena (tačno)</td></tr>
<tr><td>Relacija je funkcija (tačno)</td></tr>
</table>

$f=\{(a,1), (a,2), (c,3)\}$	Osobina 1 je zadovoljena (netačno) Osobina 2 je zadovoljena (netačno) Relacija je funkcija (netačno)	$f=\{(a,1), (a,2), (c,3), (b,?), (d,?)\}$ Elementi $b \in A$, $d \in A$ se ne preslikavaju u neki element skupa B, znači *osobina2* nije zadovoljena, i element $a \in A$ se preslikava u dva elementa skupa *B*, znači ni *osobina1* nije zadovoljena, tj. prikazana relacija nije funkcija.
$f=\{(a,1), (b,1), (c,1), (d,1)\}$	Osobina 1 je zadovoljena (tačno) Osobina 2 je zadovoljena (tačno) Relacija je funkcija (tačno)	Zadata relacija jeste funkcija. Primetite, da je moguće da se u neki element skupa *B* ne preslikava ni jedan element skupa *A* i da se više elemenata skupa *A* preslikava u isti element skupa *B*.
$f=\{(a,1), (b,1), (c,1), (d,3)\}$	Osobina 1 je zadovoljena (tačno) Osobina 2 je zadovoljena (tačno) Relacija je funkcija (tačno)	Zadata relacija jeste funkcija. Primetite, da je moguće da se više elemenata skupa *A* preslikava u isti element skupa *B*.

f={(a,1), (b,2), (c,3)}	Osobina 1 je zadovoljena (netačno)	*f={(a,1), (a,2), (c,3), (d,?)}* Element $d \in A$ se ne preslikava u neki element skupa *B*, znači *osobina2* nije zadovoljena, tj. prikazana relacija nije funkcija.
	Osobina 2 je zadovoljena (tačno)	
	Relacija je funkcija (netačno)	

TEST02: Prepoznati funkciju (Tabela 2)

U ovom testu povratna informacija je nezavisna od tačnosti odgovora. Student svakako dobija istu povratnu informaciju, gde su bitni momenti pojedinih zadataka istaknuti crvenom bojom. Na ovaj način stavlja se naglasak na suštinu zadatka i dodatno se privlači pažnja na činjenicu da je moguće da se u neki element skupa *B* ne preslikava ni jedan element skupa *A*, a i da se više elemenata skupa *A* preslikava u isti element skupa *B* ako je reč o funkciji iz skupa *A* u skup *B*. Dakle prilikom sastavljanja testa izabrali smo i zadatke koji su pogodni za nagoveštavanje injektivnog i sirjektivnog preslikavanja, kojom ćemo se baviti u okviru teme „Osobine funkcija".

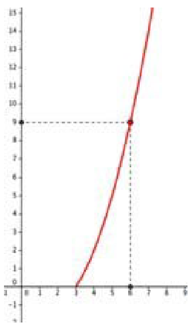
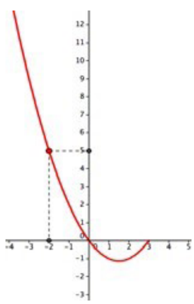
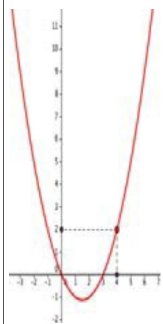
Grafik funkcije - kako možemo zadati funkciju ako je domen funkcije beskonačnan skup?

U prethodnim zadacima smo radili sa funkcijama koje nismo mogli vezati za probleme iz svakodnevnog života. Cilj sledećih testova TEST03: Pravilo pridruživanja1 (Tabela 3) i TEST05: Pravilo pridruživanja4 (Tabela 4) je ukazivanje na to da odnos veličina koje zavise jedne od drugih (sa ovakvim slučajevima se srećemo često i u realnom životu) možemo posmatrati kao funkciju. Testovi se baziraju na ispitivanju po jednog problema. Sastoje se od četiri pitanja sa tri-tri ponuđena odgovora, od kojih student bira po jedan.

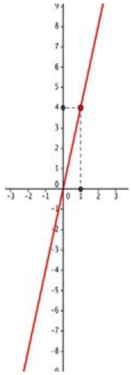
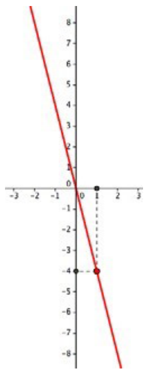
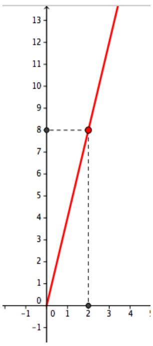
Student treba da pronađe:

- pravilo pridruživanja koje opisuje datu vezu
- skup mogućih vrednosti argumenta, tj. domen funkcije
- skup kome pripadaju moguće vrednosti funkcije, tj. kodomen funkcije
- grafik funkcije

Da bi olakšali čitanje grafika umesto statične slike koristili smo animacije pripremljene u GeoGebri, u kojima se jedna tačka šeta po grafiku funkcije, čije koordinate učenik može pročitati na koordinatnim osama. Povratna informacija ne zavisi od tačnosti izbora, sadrži tačan odgovor sa objašnjenjem.

Ako je broj stranica mnogougla *n*, koliki je broj njenih dijagonala?				
	Ponuđeni izbor 1 (tačan odgovor)	Ponuđeni izbor 2 (netačno)	Ponuđeni izbor 3 (netačno)	Povratna informacija
Pravilo pridruživanja:	*f(x)=x(x-3)/2*	*f(x)=x(x+3)/2*	*f(x)=x)/2*	Broj stranica mnogouglova može biti svaki prirodan broj veći ili jednak od 3.
Domen funkcije:	$A=\{3, 4, 5, \ldots\}\subset\mathbb{N}$	$A=\mathbb{R}$	$A=\mathbb{N}$	
Kodomen funkcije:	$B=\mathbb{N}\cup\{0\}$	$B=\mathbb{R}$	$B=\{3, 4, 5, \ldots\}$	
Grafik funkcije:				tj. $A=\{3,4,5,\ldots\}$ broj dijagonala mnogouglova je neki prirodan broj ili nula, tj. $B=\mathbb{N}\cup\{0\}$

TEST03: Pravilo pridruživanja1 (Tabela 3)

<table>
<tr><td colspan="5">Ako je dužina stranice kvadrata a cm, koliki je njegov obim?</td></tr>
<tr><td></td><td>Ponuđeni izbor 1 (tačan odgovor)</td><td>Ponuđeni izbor 2 (netačno)</td><td>Ponuđeni izbor 3 (netačno)</td><td>Povratna informacija:</td></tr>
<tr><td>Pravilo pridruživanja:</td><td>$f(x)=4x$</td><td>$f(x)=x^2$</td><td>$f(x)=4x^2$</td><td rowspan="4">Dužina stranice kvadrata merena u santimetrima može biti svaki pozitivan realan broj, tj. $A=\mathbb{R}^+$, a obim kvadrata je neki realan broj, tj. $B=\mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>Domen funkcije:</td><td>$A=\mathbb{R}^+$</td><td>$A=\mathbb{R}$</td><td>$A=\mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td>Kodomen funkcije:</td><td>$B=\mathbb{R}$</td><td>$B=\mathbb{N}$</td><td>$B=\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Grafik funkcije:</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

TEST04: Pravilo pridruživanja2 (Tabela 4)

Cilj sledećeg testa TEST05: Pravilo pridruživanja3 (Tabela 5) je da studenti još jednom ponove definiciju funkcije, kao relacije koja svakom elementu domena pridružuje tačno jedan element kodomena i da primete da isto pravilo pridruživanja može biti funkcija na nekom domenu, dok na nekom drugom ne mora da bude. Nakon predaje testa učenik dobija istu povratnu informaciju nezavisno od tačnosti odgovora sa objašnjenjem i tačnim odgovorom.

Sa pravilom pridruživanja je definisana funkcija.	Tačno/Netačno	Povratna informacija
$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=x-1$	Netačno	Pravilom pridruživanja nije definisana funkcija, jer ne određuje sliku prirodnog broja 1 (nula nije prirodan broj).
$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=x+1$	Tačno	Pravilom pridruživanja jeste definisana funkcija, jer određuje sliku svakog prirodnog broja u vidu sledećeg prirodnog broja.
$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x-1$	Tačno	Pravilom pridruživanja jeste definisana funkcija, jer određuje sliku svakog celog broja u vidu prethodnog celog broja.
$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x+1$	Tačno	Pravilom pridruživanja jeste definisana funkcija, jer određuje sliku svakog celog broja u vidu sledećeg celog broja.

TEST03: Pravilo pridruživanja3 (Tabela 5)

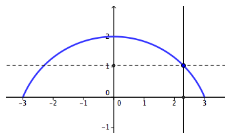
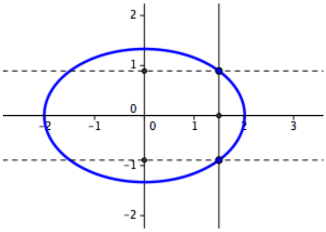
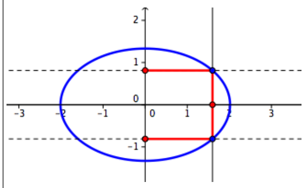
Da li je svaka prava ili linija grafik neke funkcije?

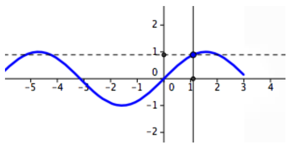
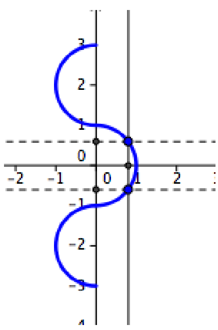
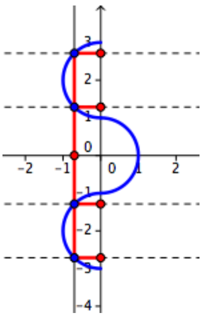
Konstatovali smo da funkcije možemo prikazati grafikom, koji je u prethodnim slučajevima bila prava ili kriva linija. Prirodno se postavlja pitanje da li važi i obrnuto. da li je svaka prava ili kriva linija grafik neke funkcije.

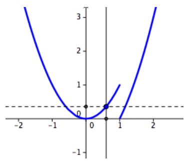
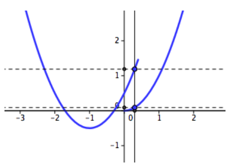
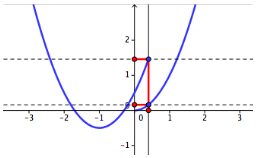
Nakon otvaranja testa TEST06: Prepoznati grafike funkcija (Tabela 7) učenici posmatraju animacije pripremljene u programu GeoGebra. Kod svakog pitanja prvo moraju odlučiti da li je prikazan grafik neke funkcije, pa ako jeste, treba da provere da li ponuđeni domen i kodomen jeste domen i kodomen prikazane funkcije.

Da bi olakšali posmatranje dali smo pokretnu tačku na linijama, čije kordinate mogu da se pročitaju na koordinatnim osama. Učenici bi trebali da primete da kada postoje različite tačke sa linije čije su x koordinate jednake, prikazana linija ne može da bude grafik funkcije, jer preslikava isti element domena u različite elemente kodomena, tj. nije zadovoljena osobina2. Ako su već odlučili da na slici jeste grafik funkcije, moraju paziti kod određivanja domena funkcije da ona mora da preslikava svaki element domena, tj, mora da bude zadovoljena i osobina1.

Povratna informacija je u ovom slučaju vezana za netačan odgovor u vidu tačnog odgovora, dopunjenog slikom, na kojoj se vidi zašto predmetna linija nije funkcija: označene su dve tačke na liniji čije su x kordinate jednake, a y koordinate različite.

Animacija	Ponuđeni odgovori (tačnost)	Povratna informacija za netačan odgovor
	Prikazana kriva je grafik funkcije.(tačno)	Prikazana kriva jeste grafik funkcije.
	Domen prikazane funkcije je skup realnih bojeva. (netačno)	Domen prikazane funkcije je interval [−2,2].
	Prikazana kriva je grafik funkcije. (netačno)	 Prikazana kriva nije funkcija, jer za $x\in[-2,2]$ nije jednoznačno određena slika elementa x.
	Domen prikazane funkcije je interval [−2,2]. (netačno)	Prikazana kriva nije grafik funkcije, pa nema ni domena.

	Prikazana kriva je grafik funkcije. (tačno)	Prikazana kriva jeste grafik funkcije.
	Domen prikazane funkcije je interval $(-\infty,3)$. (tačno)	Domen prikazane funkcije jeste interval $(-\infty,3)$.
	Prikazana kriva je grafik funkcije. (netačno)	 Prikazana kriva nije funkcija, jer za $x\in[-1,1]$ nije jednoznačno određena slika elementa x.
	Domen prikazane funkcije je interval $(-1,1)$. (netačno)	Prikazana kriva nije grafik funkcije, pa nema ni domena.

	Prikazana kriva je grafik funkcije. (tačno)	Prikazana kriva jeste grafik funkcije.
	Domen prikazane funkcije je interval $(-1,1)$. (netačno)	Domen prikazane funkcije je skup realnih bojeva.
	Prikazana kriva je grafik funkcije. (netačno)	
	Domen prikazane funkcije je interval $(-\infty,\infty)$. (netačno)	Prikazana kriva nije funkcija, jer za $x \in [0,0.4]$ nije jednoznačno određena slika elementa x. Prikazana kriva nije grafik funkcije, pa nema ni domena.

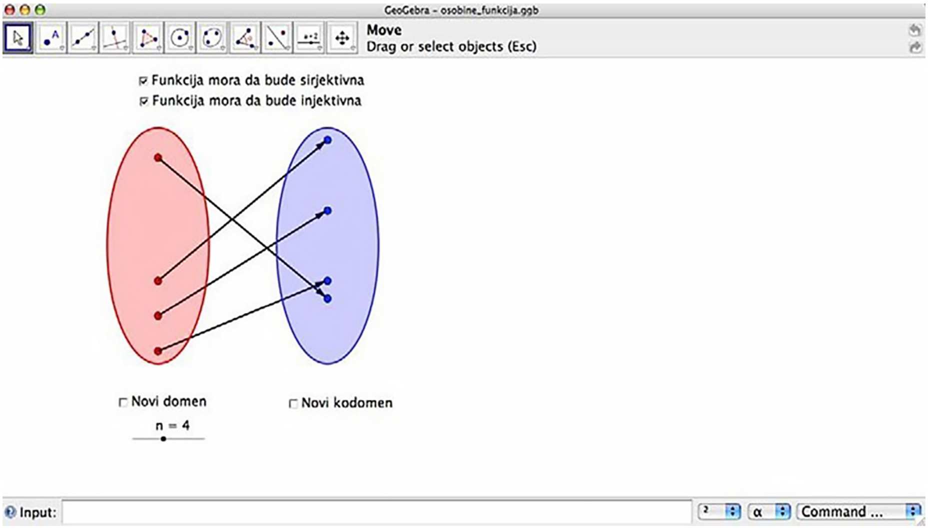
TEST06: Prepoznati grafike funkcija (Tabela 7)

Osobine funkcije

U testu TEST02: Prepoznati funkciju, studentima smo već skrenuli pažnju da definicija funkcije dozvoljava da se različiti elementi skupa A (domena) preslikavaju u isti element skupa B (kodomena), isto kao što je moguće da se u neki element skupa B ne preslikava ni jedan element skupa A.

U testu TEST07: Osobine funkcije (Tabela 8) učenicima su prikazane slučajno generisane funkcije skupa A u skup B pomoću Ven-dijagrama kreiranim u programu GeoGebra. Pomeranjem klizača n imaju mogućnost podešavanja kardinalnog broja skupa A i mogu tražiti novi domen ili kodomen, tj. novu funkciju. Uključivanjem opcije *„Funkcija mora da bude sirjektivna”* i/ili *„Funkcija mora da bude injektivna”* mogu da posmatraju slučajno generisane sirjektivne i/ili injektivne funkcije prikazane Ven-dijagramom.

Nakon otvaranja testa učenici dobijaju instrukciju: „Iskoristite mogućnosti kombinovanja koje pruža priložena GeoGebra ilustracija i odgovorite: da li su tačni sledeći iskazi?"



Izgled GeoGebra fajla testa TEST07 *(Slika 4)*

Da bi učenici posmatrali ono što je bitno vodimo ih kroz pitanja tipa *tačno/netačno*. Posle davanja odgovora, dajemo povratnu informaciju, pa imaju mogućnost daljeg posmatranja i samoprovere.

Iskaz	Tačan odgovor	Povratna informacija za "Tačno"	Povratna informacija za "Netačno"
Moguće je da se u neki element skupa *B* ne preslikava ni jedan element skupa *A*.	Tačno	Dobro ste zapazili.	Posmatrajte još malo. Ako tražite novi domen ili kodomen, tj. novu funkciju iz *A* u *B*, može da se desi, da se u neki element skupa *B* ne preslikava ni jedan element skupa *A*.
Moguće je da se više elemenata skupa *A* preslikava u isti element skupa *B*.	Tačno	Dobro ste zapazili.	Posmatrajte još malo. Ako tražite novi domen ili kodomen, tj. novu funkciju iz *A* u *B*, može da se desi, da se više elemenata skupa *A* preslikava u isti element skupa *B*.

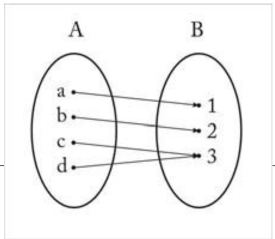
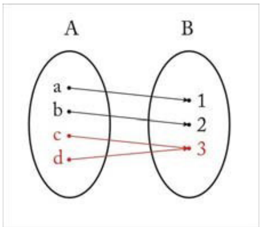
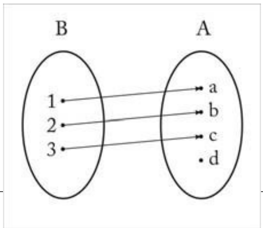
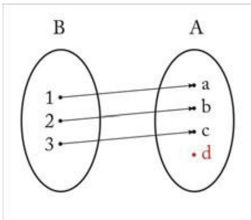
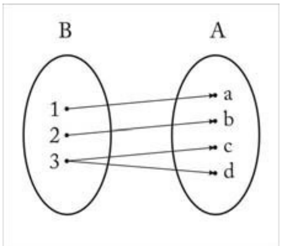
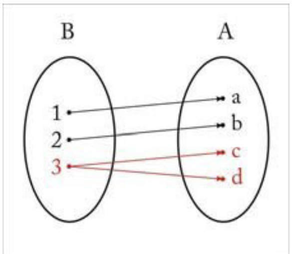
Ako je funkcija *injektivna* moguće je da se u neki element skupa *B* ne preslikava ni jedan element skupa *A*.	Tačno	Dobro ste zapazili.	Posmatrajte još malo. Ako tražite nove injektivne funkcije iz *A* u *B*, može da se da se desi, da u neki element skupa *B* ne preslikava ni jedan element skupa *A*.
Ako je funkcija *injektivna* moguće je da se više elemenata skupa *A* preslikava u isti element skupa *B*	Netačno	Posmatrajte još malo. Bilo koliko puta tražite nove injektivne funkcije iz *A* u *B*, ne može da se desi, da se više elemenata skupa *A* preslikava u isti element skupa *B*.	Dobro ste zapazili.
Ako je funkcija *sirjektivna* moguće je da se u neki element skupa *B* ne preslikava ni jedan element skupa *A*.	Netačno	Posmatrajte još malo. Bilo koliko puta tražite nove sirjektivne funkcije iz *A* u *B*, ne može da se desi, da se u neki element skupa *B* ne preslikava ni jedan element skupa *A*.	Dobro ste zapazili.

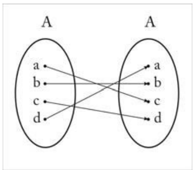
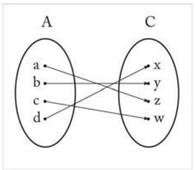
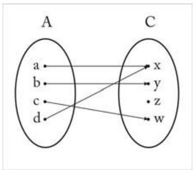
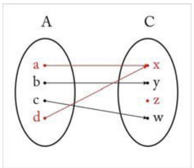
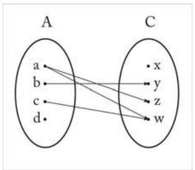
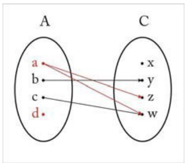
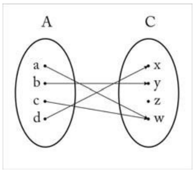
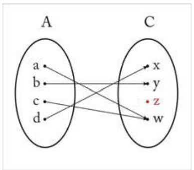
TEST07: Osobine funkcije (Tabela 8)

Dok učenici stignu do kraja interaktivne lekcije opazili su karakteristike injektivne i sirjektivne funkcije, pa možemo dati formalnu definiciju i korišćene oznake u lekciji: „Osobine funkcije".

Cilj sledećeg testa TEST08: Prepoznati osobine funkcija (Tabela 9) je da učenici kroz pitanja tipa *višestruki izbor* ponavljaju stečena saznanja o funkcijama. Trebaju odrediti da li je prikazana relacija funkcija i ako jeste da li je injektivna, sirjektivna ili bijektivna.

Učenici nakon otvaranja testa dobijaju instrukciju o temi i popunjavanju testa. Povratna informacija u ovom slučaju ne zavisi od tačnosti odgovora i sadrži rešenje zadataka, gde su crvenom bojom istaknuti bitni detaljik, koji moraju da se zapaze prilikom rešavanja.

Relacije ρ iz $A \times B$, gde $A=\{a, b, c, d\}$ i $B=\{1, 2, 3\}$ date su Ven-dijagramima. Odrediti koji su tačni od sledećih iskaza: • Prikazana relacija je funkcija • Prikazana relacija je injektivna funkcija (svaki element skupa *A* preslikava se u različiti element skupa *B*) • Prikazana relacija je sirjektivna funkcija (ne postoji element skupa *B* koja nije slika nekog elementa iz *A*) • Funkcija je bijekcija • Nijedan od navedenih iskaza nije tačan.		
Slika	Tačnost ponuđenih odgovora	Povratna informacija
	Tačno Netačno Tačno Netačno Netačno	 Zadata relacija je sirjektivna funkcija.
	Tačno Tačno Netačno Netačno Netačno	 Zadata relacija je injektivna funkcija.
	Netačno Netačno Netačno Netačno Tačno	 Zadata realcija nije funkcija, jer se element $3 \in B$ preslikava u dva elementa skupa *A*.

	Tačno Tačno Tačno Tačno Netačno	Zadata relacija je bijekcija.
	Tačno Tačno Tačno Tačno Netačno	Zadata relacija je bijekcija.
	Tačno Netačno Netačno Netačno Netačno	 Prikazana relacija jeste funkcija, koja nije ni sirjektivna ni injektivna.
	Netačno Netačno Netačno Netačno Tačno	 Zadata relacija nije funkcija, jer se element $a \in A$ preslikava u dva elementa skupa *B*, i element $d \in A$ se ne preslikava u neki element skupa *B*.
	Tačno Tačno Netačno Netačno Netačno	 Zadata relacija je injektivna funkcija.

TEST08: Prepoznati osobine funkcija (Tabela 9)

Zaključak

Integracija Moodle-a i GeoGebra alata u nastavi pojma funkcije do sada je uglavnom prikazana u cilju pedagoške evaluacije. Pozitivan prijem ove metode podstiče nas da u budućnosti sprovedemo detaljnija istraživanja kako bismo empirijskim podacima podržali efikasnost ove metode. Posebno bi bilo važno ispitati u kojoj meri primenjeni interaktivni učenički ambijent doprinosi poboljšanju učeničkog učinka, kao i dubljem razumevanju pojmova.

Naredni koraci uključuju planiranje longitudinalnog istraživanja koje bi analiziralo uticaj ove metode ne samo na akademske rezultate, već i na matematički stav studenata i njihove sposobnosti rešavanja problema.

Na osnovu dosadašnjih iskustava smatramo da ovakva tehnološki zasnovana rešenja u obrazovanju mogu učiniti matematičko učenje ne samo efikasnijim, već i prijatnijim. Ova metoda može biti posebno obećavajuća ne samo u okviru obuke učitelja, već i u osnovnom i srednjem obrazovanju. Stoga je od ključne važnosti da se budući učitelji upoznaju sa ovim metodama već tokom svog obrazovanja, jer je efikasno korišćenje modernih tehnoloških alata neophodno za povećanje motivacije učenika i poboljšanje njihovog razumevanja.

Rezultati budućih istraživanja mogu doprineti ne samo razvoju obrazovnih alata, već i njihovoj široj primeni, čime će doprineti razvoju obrazovnih i učeničkih okruženja 21. veka.

Literatura

1. Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004): Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. In *Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference*, Vol. 2002, pp. 1-6.
2. Kečkić, J., D. (1999): *Matematika sa zbirkom zadataka za III. razred srednje škole; za gimnaziju: opštu i prirodno-matematičkog smera i prirodno matematičko područje rada*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva
3. Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J., Vincze, I. (2007): *Sokszínű matematika 9,* Szeged: Mozaik kiadó
4. Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J., Vincze, I. (2007): *Sokszínű matematika 10*, Szeged: Mozaik kiadó
5. Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J., Vincze, I. (2007): *Sokszínű matematika 11*, Szeged: Mozaik kiadó
6. Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J., Vincze, I. (2007): *Sokszínű matematika 12*, Szeged: Mozaik kiadó

7. Milić P., Stojanović, V., Kadelburg, Z., Boričić, B. (2000): Matematika za I. razred srednje škole (programi sa četiri časa matematike nedeljno), Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva
8. Obrdović, M., Geogrijević, D. (2003): *Matematika sa zbirkom zadataka za IV. razred srednje škole gimnazija i za područje rada elektrotehnika, prirodno matematičko, geodezija i građevinarstvo;svi profili rudarstva; svi profili hemije i hemetala; mašinstvo i obrada metala*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva
9. Pierce, R., & Stacey, K. (2010): Mapping Pedagogical Opportunities Provided by Mathematics Analysis Software
10. Szügyi, J. (2011): Nastava funkcije u srednjoj školi, master rad, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
11. Vojvodić, G., Petrović, V., Despotović, R., Šešelja, B. (2000): *Matematika za II. razred srednje škole (programi sa četiri časa matematike nedeljno).* Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva
12. Weinhandl, R., Hohenwarter, M., Lavicza, Z., & Houghton, T. (2021): Using GeoGebra Notes to Dynamically Organise Digital Learning Resources and Enhance Students' Mathematics Skills. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *28*(3), 171-182.
13. Weinhandl, R., Lavicza, Z., Hohenwarter, M., & Schallert, S. (2020): Enhancing flipped mathematics education by utilising GeoGebra. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *8*(1), 1-15.
14. Zöchbauer, J., Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2021): Evaluating GeoGebra Classroom with Usability and User Experience Methods for Further Development. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *28*(3), 183-191.