ÖSSZEFOGLALÓ

Detki József a Szabadkai Építőmérnöki Kar első, doktori fokozattal rendelkező matematikatanára volt, s ugyanakkor meghatározó alakja a Karon folyó matematikaoktatásnak, valamint jelentős szerep jutott neki a magyar nyelvű oktatás tradíciójának kialakításában is. A munkában összefoglaljuk tudományos munkásságát, amely a másodrendű nemlineáris differenciál-egyenletek témakörébe tartozik.

Kulcsszavak: Detki József, matematikatudományok doktora, másodrendű nemlineáris differenciálegyenletek

SAŽETAK

Jožef Detki je bio prvi doktor matematičkih nauka koji je predavao na Građevinskom fakultetu u Subotici. Imao je presudnu ulogu u oblikovanju nastave iz matematike na fakultetu. Značajno je doprineo formiranju tradicije da se nastava održava i na mađarskom jeziku. U radu dajemo pregled njegovog naučnog doprinosa koji pripada oblasti nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda.

Ključne reči: Jožef Detki, doktor matematičkih nauka, nelinearne diferencijalne jednačine drugog reda

ABSTRACT

József Detki was the first teacher of Mathematics at the Faculty of Civil Engineering Subotica with a Ph.D. degree. He was a crucial figure in the establishment of the education of mathematics at the Faculty. He played a significant role in the development of the tradition of teaching at the Faculty in Hungarian language. In this work, we summarize his scientific work on the topic of second-order nonlinear differential equations.

Keywords: József Detki, Ph.D. in mathematical science, second-order nonlinear differential equations

Évkönyv 2022, XVII. évfolyam, 1. szám
Újvidéki Egyetem
Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar, Szabadka

ETO: 51:929 Detki J.
517.925.4
DOI: https://doi.org/10.18485/uns_evkonyv.2022.11
Eredeti tudományos munka
A leadás időpontja: 2022. október 27.
Az elfogadás időpontja: 2022. december 25.

PÉICS HAJNALKA
ROŽNJIK ANDREA
Újvidéki Tudományegyetem,
Szabadkai Építőmérnöki Kar
peics@gf.uns.ac.rs
andrea@gf.uns.ac.rs

DETKI JÓZSEF, A SZABADKAI ÉPÍTŐMÉRNÖKI KAR MATEMATIKAOKTATÁSÁNAK MEGHATÁROZÓ ALAKJA

József Detki – Key Figure In The Education Of Mathematics At The Civil Engineering Subotica

Jožef Detki – ključna figura u oblikovanju nastave iz matematike na Građevinskom fakultetu Subotica

1. ÉLETRAJZI ADATOK

1.1. Gyermekkor, diákévek

Detki József a vajdasági Tiszaszentmiklóson született 1932. április 13-án. Tiszaszentmiklós (Ostojićevo) közepes nagyságú falu Szerbiában, a vajdasági Bánságban, amely ma Csóka közigazgatási területéhez tartozik.

Detki József egyszerű családból származott. Édesapja földműves volt és hosszú éveken át a csókai szőlészetben dolgozott. Édesanyja a családi háztartást vezette. Szerény körülmények között nőtt fel, de tehetségének, szorgalmának, kitartásának és családja önzetlen bátorításának köszönhetően a kis tiszaszentmiklósi gyerekből a matematikatudományok doktora lett. Az elsők között Szabadkán. Magyarként itt a Vajdaságban.

Általános iskolai tanulmányainak első hat osztályát Tiszaszentmiklóson végezte 1940-től 1946-ig, ahol akkor csupán hatosztályos általános iskolai képzés folyt. Az általános iskola hetedik és nyolcadik osztályát Kikindán végezte az 1946/47-es, illetve az 1947/48-as iskolaévben. 1948-ban iratkozott be a Zentai Gimnáziumba, ahol 1952-ben sikeres érettségi vizsgát tett. A következő iskolaév alatt, 1952-től 1953-ig tényleges katonai idejét töltötte a Jugoszláv Haditengerészet kötelékében Hvar, illetve Korčula szigetén. Így egy év késéssel, 1953-ban iratkozhatott be a Belgrádi Egyetem Matematikai Karára, ahol 1958-ig folytatott egyetemi tanulmányokat. A második világháború utáni Jugoszláviában Belgrád volt az egyetlen közeli város, ahol egyetemi tanulmányokat lehetett folytatni, s ott abban az időben egy magyar hallgatói klub is működött. Az egyetemi tanulmányaihoz az adai községtől kapott ösztöndíjat. Ezért, az egyetemi kurzusok lehallgatása után, 1959-től 1960-ig abszolvensként az adai Cseh Károly Általános Iskolában dolgozott matematikatanárként, s közben sikeresen eleget tett vizsgakötelezettségeinek is, így 1960. november 23-án megszerezte matematikatanári oklevelét.

1.2. Munkahelyek, tanulmányok

A diploma megszerzése után, 1960-tól a Zentai Gimnáziumban kapott állást, majd 1962-től az ugyanabban az épületben székelő zentai Vegyészeti Szakközépiskola matematikatanára lett. 1965-ben lett a zentai Vegyészeti Szakközépiskola igazgatója, s egészen 1970-ig töltötte be ezt a tisztséget. Volt munkatársai és diákjai szívesen emlékeznek rá, hiszen áldozatkészségének és rátermettségének köszönhetően az ő igazgatása alatt kapott egy újabb szintet az iskola épülete. Szorgalmas, segítőkész ember volt. Önzetlenségét bizonyítja az a tény is, hogy az erre a periódusra eső nagy Tisza-árvíz idején is napokig kint dolgozott a többi önkéntes zentaival együtt a tiszai gátakon.

1970-től a Szabadkai Tanárképző Főiskola kinevezett főiskolai előadója volt, majd 1975-ben főiskolai tanári kinevezést kapott. Ezekben az években családjával Zentáról Szabadkára költözött. Akkoriban ösztöndíjasként a szegedi József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézetében folytatott tudományos kutatómunkát dr. Pintér Lajos irányításával, s akkor ismerkedett meg a közönséges differenciálegyenletek megoldásai kvalitatív vizsgálatának elméletével. 1976. december 16-án az Újvidéki Egyetem Természettudományi Karának Matematikai Intézetében szerezte meg a matematikatudományok doktora címet, doktori disszertációjának dr. Bogoljub Stanković, az Újvidéki Egyetem Természettudományi Matematikai Karának akadémikusa, dr. Vojislav Marić, az Újvidéki Egyetem Műszaki Karának egyetemi rendes tanára és dr. Milorad Bertolino, a Belgrádi Egyetem Természettudományi Matematikai Karának egyetemi rendes tanára által alkotott tudományos bizottság előtti megvédésével.

Detki József 1978-tól az Újvidéki Egyetem Szabadkai Építőmérnöki Karának munkatársa, ahol 1978-ban kapta meg egyetemi docensi, 1983-ban egyetemi rendkívüli tanári, 1987-ben pedig egyetemi rendes tanári kinevezését. Ő volt a Szabadkai Építőmérnöki Kar első doktori fokozattal rendelkező matematikatanára (http://www.gf.uns.ac.rs/zaposleni.html), s ezért nagy szerepe volt a matematikai tantárgyak rendszerének kialakításában is. Az általa készített tantárgyak tanmenetei ma sem veszítették el aktualitásukat, jó alapozó kurzust képeznek a jövendő építőmérnökök számára. A Matematika és Fizika Tanszéknek volt a vezetője, és több ízben volt az Építőmérnöki Kar dékánhelyettese is. Mindig legjobb tudása és tehetsége szerint képviselte a Kar érdekeit.

A Szabadkai Építőmérnöki Karon eltöltött évek alatt magyar és szerb nyelven tartott előadást az első- és másodéves hallgatók számára matematikából, s részt vett a posztgraduális képzés matematikaoktatásában is. Társszerzője, illetve szerzője a szabadkai Építőmérnöki Kar hallgatói számára magyar, illetve szerb nyelven kiadott Matematika I., illetve Matematika II. tankönyveknek.

Detki József, nyugalmazott egyetemi tanár, hosszú, súlyos betegség után 2000. október 28-án hunyt el Szombathelyen.

2. TUDOMÁNYOS MUNKÁSSÁGA

Detki József tudományos munkásságát számos nemzetközi és hazai matematikai folyóiratban megjelent tudományos cikk, valamint nemzetközi és hazai tudományos tanácskozáson való aktív részvétel igazolja. Tudományos cikkei magyar, szerb, orosz, angol és német nyelven jelentek meg.

Első jelentős műve a doktori disszertációja volt (Detki, 1976), melynek címe: *Közönséges másodrendű nemlineáris differenciálegyenletek megoldásainak viselkedése*. A disszertáció négy fejezetből áll. Az I. fejezetben a differenciálegyenletek kvalitatív elméletének rövid történeti áttekintését írja le. A II. fejezetbe került azoknak az egyenlőtlenségeknek a felsorolása, amelyeknek alkalmazására a III. fejezetben kerül sor. A III. fejezetben azon eredmények kerülnek felsorolásra, melyek másodrendű nemlineáris differenciálegyenletek korlátos megoldásaira fogalmaznak meg új feltételeket. Példák mutatják be a kapott eredmények és néhány ismert eredmény egymástól való függetlenségét. A IV. fejezetben másodrendű differenciálegyenletek oszcilláló megoldásainak létezésére ad meg új feltételeket. Egy speciális esetben korlátos oszcilláló megoldásra is kimond feltételt, melyet ismét összehasonlít más ismert feltételekkel. Az V. fejezetben a Wintner-féle korlátossági tétel egy általánosítása következik. A munkában megjelent eredményekről dr. Pintér Lajos a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének egyetemi docense a következő hivatalos véleményt adta 1973. március 7-én:

„A differenciálegyenletek modern elméletének legfontosabb és az utóbbi 20 évben különösen erősen fejlődő ágát alkotják a kvalitatív vizsgálatok. Mint az kiderült, a differenciálegyenletek közül csak igen kevésnek a megoldása adható meg explicit módon, így nagy szükség van olyan eljárásokra, melyek a megoldások egy-egy tulajdonságát – pl. korlátosság, monotonitás, oszcilláció – állapítják meg anélkül, hogy a megoldást explicit módon ismernénk. Ilyen vizsgálatok körébe illeszkedik Detki Józsefnek ez a munkája is. A dolgozatban nemlineáris másodrendű egyenleteket vizsgál. Az ilyen egyenletek megoldásainak vizsgálata azért is nehéz, mert míg a lineáris esetben elég sok eszközünk van, a nemlineáris esetre ezekből csak kevés marad. A nemlineáris egyenletek az alkalmazások szempontjából igen fontosak, mert sok fizikai feladat ilyenre vezetődik.

A dolgozatban a szerző a megoldások $[a,\infty)$-en való korlátosságát vizsgálja. Az elméletből ismeretes ezzel kapcsolatban Opial lengyel matematikus 1959-ből származó eredménye. Lényegileg ugyanilyen alakú egyenleteket vizsgálva Detki József két különböző módszerrel két tételt nyer, melyeket az Opial-félével összehasonlítva megmutatja, hogy a tételek egymástól függetlenek. Megad három példát, melyekre az ő két tétele és az Opial-tétel közül mindig pontosan egy alkalmazható. A munkát érdekesnek tartom és remélem, hogy folytatásaként ezekkel az egyenletekkel kapcsolatban a szerző más tulajdonságokat is vizsgálni fog.”

Tudományos munkásságának bemutatása során csak a jelentősebb eredményekre szorítkozunk, melyek a mai matematikai tudományos besorolásokban is jelen vannak. A másodrendű nemlineáris differenciálegyenletek és bizonyos típusú differenciálegyenlet-rendszerek megoldásainak oszcillálását biztosító eredmények doktori disszertációjában (Detki, 1976), illetve a (Detki, 1973), (Detki, 1981), (Detki, 1984) és (Detki és Tumbas, 1984) tudományos publikációkban találhatók meg. A másodrendű nemlineáris differenciálegyenletek megoldásainak korlátosságával kapcsolatos eredmények bemutatása doktori disszertációjában található meg (Detki, 1976), illetve a (Detki, 1985a), (Detki, 1985b), (Detki, 1986a), (Detki, 1987), (Detki és Péics, 1991a), (Detki és Péics, 1991b) tudományos folyóiratcikkekben. Tudományos eredményeinek harmadik és egyben legjelentősebb csoportját képezik a másodrendű nemlineáris differenciálegyenletek megoldásainak Wintner-féle korlátosságával foglalkozó eredmények, amelyek olyan feltételek megadását jelentik, amelyek biztosítják, hogy a megoldások négyzetesen integrálhatóak legyenek. Ezek az eredmények doktori disszertációjában (Detki, 1976), illetve a (Detki, 1974) és (Detki, 1987) tudományos publikációkban jelentek meg. Végül a késleltetett idejű másodrendű nemlineáris differenciálegyenletekkel és egyes típusú késleltetett idejű differenciálegyenlet rendszerekkel foglalkozó eredmények, ahol a megoldások különböző tulajdonságainak kivizsgálására kerül sor, mint az oszcilláció, ezen belül a differenciálegyenlet-rendszerek esetében az erős oszcilláció, gyenge oszcilláció, illetve a nemoszcillálás kérdése, valamint annak a kérdéskörnek a megvilágítása, hogy vajon a megoldások rendelkeznek-e valamilyen monotonitási tulajdonsággal, vagy pedig nem, a (Detki, 1986b), (Detki, 1986c), (Detki, 1990a) és (Detki, 1990b) publikációkban található.

Az itt felsoroltakon kívül még számos tankönyvnek, (Detki és Ferenci, 1982), (Detki, 1984k), illetve szakmunkának, (Gajin és társai, 1982), (Orlov-Gajin és társai, 1984), (Detki és társai, 1988), (Detki és társai, 1990), (Detki és társai, 1994) is szerzője vagy társszerzője.

2.1. Előzmények

Mielőtt bemutatnánk Detki József jelentősebb tudományos eredményeit, ejtsünk pár szót az előzményekről, melyek nagy szerepet játszottak azok megszületésében.

Opial tanulmányozta 1959-ben az

(2.1) $$y'' + \left[c_1(x) + c_2(x)\right] y = 0$$

másodrendű lineáris differenciálegyenletet, és a megoldás korlátosságára a következő tételt fogalmazta meg (Opial, 1959).

2.1.1. Tétel. *Legyen* c_1 *a* $[0,\infty)$ *intervallumon pozitív, folytonos, monoton növekvő függvény,* c_2 *pedig a* $[0,\infty)$ *intervallumon folytonos függvény. Ha*

(2.2) $$\int_0^\infty \frac{|c_2(x)|}{\sqrt{c_1(x)}}dx < \infty,$$

akkor a (2.1) differenciálegyenlet minden megoldása korlátos $[0,\infty)$ *-en.*

Bihari Imre 1961-ben az

(2.3) $$y'' + c_1(x)y + c_2(x)g(y) = 0$$

másodrendű nemlineáris differenciálegyenletet tanulmányozta, s a megoldások korlátosságára a következő eredményhez jutott (Bihari, 1961).

2.1.2. Tétel. *Legyen* c_1 *a* $[0,\infty)$ *intervallumon pozitív, folytonos, monoton csökkenő függvény,* c_2 *a* $[0,\infty)$ *intervallumon folytonos függvény,* $\alpha > 0$ *és elég nagy* x *esetén,*

$$\frac{c_2(x)}{c_1(x)} < \frac{\alpha}{x}, \qquad \left|\left(\frac{c_2(x)}{c_1(x)}\right)'\right| < \frac{\alpha}{x^2}.$$

Legyen továbbá g *olyan pozitív függvény, amely a* $(-\infty,\infty)$ *intervallum minden pontjában értelmezett és* $g(u) \in \mathrm{Lip}(s)$*, valamint*

$$G(u) = \int_0^u g(s)ds \quad \textit{esetén} \qquad \frac{|G(u)|}{u^2} \quad \textit{korlátos minden } u \textit{ -ra.}$$

Ekkor a (2.3) differenciálegyenlet minden megoldása korlátos ha $x \to \infty$.

Wong, illetve Burton 1966/1967-ben az

(2.4) $$y'' + c(x)g(y) = 0,$$ valamint az

(2.5) $$y'' + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)g_i(y)h_i(y') = 0$$

másodrendű nemlineáris differenciálegyenletek megoldásainak viselkedését tanulmányozták, és a megoldások korlátosságára a következő eredményeket adták (Wong és Burton, 1965), (Wong, 1967).

2.1.3. Tétel. *Legyen* c *a* $[0,\infty)$ *intervallumon pozitív, folytonosan differenciálható függvény,* g *pedig olyan, a* $(-\infty,\infty)$ *intervallumon folytonos, monoton növekvő függvény, hogy* $ug(u)>0$*, ha* $u\neq 0$*. Ha*

(2.6) $$\lim_{|u|\to\infty} G(u)=\lim_{|u|\to\infty}\int_0^u g(s)ds=\infty,$$

(2.7) $$c(x)\geq C_0>0,\ ha\ x\in[0,\infty)\ és\ \int_0^\infty |c'(x)|dx<\infty,$$

akkor a (2.4) differenciálegyenlet minden megoldása korlátos a $[0,\infty)$ *intervallumon.*

2.1.4. Tétel. *Legyen* c_i *a* $[0,\infty)$ *intervallumon pozitív, folytonos függvény,* g_i *a* $(-\infty,\infty)$ *intervallumon folytonos olyan függvény, hogy* $ug_i(u)>0$*,* $u\neq 0$*,* h_i *pedig a* $(-\infty,\infty)$ *intervallumon pozitív folytonos függvény,* $i=1,2,\ldots,n$ *. Ha*

$$\int^\infty \left|c_i^{-1}(x)\left(c_i\right)'_-(x)\right|dx<\infty\ ,\ i=k\ és\ \int^\infty \left|c_i^{-1}(x)\left(c_i\right)'_+(x)\right|dx<0,\ i\neq k\ ,\ ahol$$

$$\left(c_i\right)'_+(x)=\max\left[c_i'(x),0\right]\qquad és\qquad \left(c_i\right)'_-(x)=\min\left[c_i'(x),0\right].$$

akkor a (2.5) differenciálegyenlet minden megoldása korlátos a $[0,\infty)$ *intervallumon.*

Burton és Grimmer tanulmányozták 1970-ben az

(2.8) $$\left(r(x)y'\right)'+c(x)g(y)h(y')=0$$

másodrendű nemlineáris differenciálegyenlet megoldásának viselkedését és a következő eredményhez jutottak (Burton és Grimmer, 1970).

2.1.5. Tétel. *Legyen* $0<C_1\leq r(x)\leq C_2$ *és* $0<C_3\leq c(x)\leq C_4$*,* $x\geq x_0$ *esetén, ahol* C_1,C_2,C_3,C_4 *konstansok,* $ug(u)>0$*, ha* $u\neq 0$*, valamint* f *pozitív függvény a* $(-\infty,\infty)$ *intervallumon. Ekkor a (2.8) differenciálegyenlet minden megoldása akkor, és csakis akkor korlátos, ha*

$$\int_0^{\pm\infty} g(s)ds=\infty.$$

Graef és Spikes 1975-ben tanulmányozták az

(2.9) $$\left(r(x)y'\right)'+c(x)g(y)h(y')=f(x)$$

másodrendű nemlineáris differenciálegyenlet megoldásának viselkedését és a következőt bizonyították be (Graef és Spikes, 1975):

2.1.6. Tétel. *Legyen* r *olyan pozitív folytonos, korlátos függvény az* $[x_0,\infty)$ *intervallumon, hogy* $r'(x)\geq 0$*,* c *és* f *pozitív folytonos függvények az* $[x_0,\infty)$ *intervallumon,* g *és* h *pedig pozitív folytonos függvények a* $(-\infty,\infty)$ *intervallumon. Ha (2.6) teljesül és*

$$\int_{x_0}^{\infty}\left[\frac{c'_-(x)}{c(x)}\right]dx<\infty \quad \textit{és} \quad \int_{x_0}^{\infty}|f(x)|dx<\infty,$$

akkor a (2.9) másodrendű nemlineáris differenciálegyenlet minden megoldása korlátos.

Wintner 1950-ben tanulmányozta munkájában az

$$y''+c(x)y=0 \tag{2.10}$$

másodrendű lineáris differenciálegyenletet, ahol c folytonos függvény a $[0,\infty)$ intervallumon. Az ő nevéhez fűződik a következő tétel (Wintner, 1950).

2.1.7. Tétel. *Ha*

$$\int_0^{\infty} x^3\,|c(x)|^2\,dx<\infty,$$

akkor a (2.10) differenciálegyenlet egyetlen megoldása sem négyzetesen integrálható.

Bellman 1953-ban kiadott könyvében található az alábbi állítás (Bellman, 1953).

2.1.8. Tétel. *Ha a (2.10) differenciálegyenlet minden megoldása négyzetesen integrálható, akkor ugyanez a tulajdonság érvényes az* $y''+\left[c(x)+h(x)\right]y=0$ *egyenlet megoldásaira is a* $[0,\infty)$*-en, amennyiben* $|h(x)|\leq C$*, a* c *és* h *függvények pedig folytonosak a* $[0,\infty)$ *intervallumon.*

2.2. Kutatási eredmények

Itt következik a Detki József által megadott és bebizonyított tételeknek a felsorolása. Az eredmények részben témakör szerint, részben időrendben csoportosítottak.

Kezdjük a felsorolást a (2.4) másodrendű nemlineáris differenciálegyenlettel. A tétel Kamenev eredményének általánosítását adja meg arra az esetre, (Kamenev, 1977), amikor a c függvény n-szer differenciálható.

2.2.1. Tétel. [(Detki, 1984)] *Legyen valamely* $n > 2$*-re* $c \in C^n[x_0,\infty)$ *és*

$$\limsup_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x^{n-1}}\int_{x_0}^{x}\left(x-t\right)^{n-1}c(t)dt\right]=\infty,$$

valamint legyen $g \in C^1(-\infty,\infty)$*,* $ug(u) \ge 0$ *és* $g'(u) \ge 1$*, akkor a (2.4) differenciálegyenlet minden megoldása oszcillál.*

Tekintsük most a (2.5) differenciálegyenletet. Az itt következő tétel azt mutatja be, hogy milyen feltételek mellett alkotnak a fenti egyenlet korlátos oszcilláló megoldásának maximumai és minimumai konvergens sorozatokat. Az eredmény Burton, Grimmer és Wong megfelelő eredményeinek egyfajta általánosítását jelenti, (Burton és Grimmer, 1970), (Wong és Burton, 1965), és a következő módon fogalmazható meg.

2.2.2. Tétel. [(Detki, 1976), (Detki, 1981)] *Legyen* c_i*,* $i = 1,2,\dots,n$*, a* $[0,\infty)$*-en differenciálható függvény,* $c_i(x) \to C_i \ge 0$*, ha* $x \to \infty$*, ahol a* C_i*-k közül legalább egy szigorúan pozitív és*

$$\int_0^\infty |c_i'(t)|dt < \infty,$$

g_i*, a* $(-\infty,\infty)$*-en folytonos függvény és* $\operatorname{sgn} g_i(t) = \operatorname{sgn} t$*,* h_i *a* $(-\infty,\infty)$*-en pozitív, folytonos függvény és* $h_i(s) = h(s)$ *,* $i = 1,2,\dots,n$*. Ha* y *a (2.5) egyenlet egy korlátos oszcilláló megoldása, akkor az* y *megoldás maximumai és minimumai egy-egy konvergens sorozatot alkotnak.*

Tekintsük a következő tétel megfogalmazásához az

$$y'' + c(x)g(y(x)) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)g_i(y(x)) = 0 \tag{2.11}$$

egyenletet, ahol az oszcilláció szempontjából domináns szerepe a c és g függvényeknek van. A következő állítás szintén Kamenev egy tételének általánosítása (Kamenev, 1973), amely a (2.4) egyenlet oszcilláló megoldásait biztosítja változó előjelű c függvény esetén. Kamenev tételében nem szerepel a $\sum_{i=1}^{n} c_i(x)g_i(y(x))$ összeg, és azt teszi fel, hogy $g'(y) \ge \varepsilon > 0$, minden y-ra, a következő állításban pedig feltétel, hogy a c függvény felülről korlátos legyen.

2.2.3. Tétel. [(Detki, 1973), (Detki, 1976)] *Legyen* $c, c_i \in C[x_0, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, c *felülről korlátos a* $[x_0, \infty)$ *intervallumon és*

$$\int_{x_0}^{t} c(s)ds \to A, \; t \to \infty,$$

valamint legyen $g, g_i \in C^1(-\infty, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $ug(u) > 0$, $u \neq 0$, *egy* $\delta > 0$ *konstansra*

$$g'(y) \geq \varepsilon > 0, \; y \in (-\delta, \delta),$$

(2.12) $$\int_{a}^{\infty} \frac{dy}{g(y)} < \infty, \qquad \int_{-a}^{-\infty} \frac{dy}{g(y)} < \infty,$$

ahol a *tetszőleges pozitív szám, és*

(2.13) $$\sum_{i=1}^{n} c_i(x) g_i(y) \geq 0, \; y \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i(x) g_i(y) \leq 0, \; y \leq 0.$$

Ha létezik olyan pozitív folytonos nemnövekvő $h \in C[x_0, \infty)$ *függvény, hogy*

$$\limsup_{x \to \infty} \int_{x_0}^{x} h(t) \int_{t}^{\infty} c(s) ds dt = \infty,$$

akkor a (2.11) differenciálegyenlet minden megoldása oszcilláló.

A következő állítás Onose módszerének általánosítása, (Onose, 1970), a (2.11) típusú egyenletre.

2.2.4. Tétel. [(Detki, 1973), (Detki, 1976)] *Legyen* $c, c_i \in C[x_0, \infty)$, $\int_{x}^{\infty} sc(s)ds = \infty$, *valamint* $g, g_i \in C^1(-\infty, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $yg(y) > 0$, $y \neq 0$, *egy* $\delta > 0$ *konstansra* $g'(y) \geq \varepsilon > 0$, $y \in (-\delta, \delta)$, *ugyanakkor teljesüljön (2.12) és (2.13). Ekkor a (2.11) egyenlet minden megoldása vagy oszcillál, vagy monoton nullához tart.*

Tekintsük a következő állítás megfogalmazásához az

(2.14) $$y'' + [c_1(x) + c_2(x)] g(y) = f(x)$$

másodrendű nemlineáris differenciálegyenletet, és tegyük fel, hogy az együtthatófüggvények olyan tulajdonságúak, hogy biztosítják a megoldás létezését a $[0, \infty)$ intervallumon.

2.2.5. Tétel. [(Detki, 1976)] *Legyen* c_1 $[0,\infty)$ *-en pozitív, monoton növekvő, folytonosan differenciálható függvény,* c_2 *a* $[0,\infty)$ *intervallumon differenciálható függvény,* g *a* $(-\infty,\infty)$ *intervallumon folytonos, monoton növekvő függvény és* $\operatorname{sgn} g(t)=\operatorname{sgn} t$*, valamint* f *a* $[0,\infty)$ *intervallumon folytonos függvény. Ha (2.6) teljesül és*

$$1+\frac{c_2(x)}{c_1(x)}\geq \alpha>0\,,\ x\in[0,\infty)\,,\ \int_0^\infty\left(\frac{|f(s)|}{\sqrt{c_1(s)}}+\left|\left(\frac{c_2(s)}{c_1(s)}\right)'\right|\right)ds<\infty \tag{2.15}$$

akkor a (2.14) differenciálegyenlet minden megoldása korlátos a $[0,\infty)$ *intervallumon.*

A következő példákon keresztül könnyen belátható, hogy homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet esetén Opial 1959-ben adott tétele (2.1.1. Tétel) (Opial, 1959), Wong tétele 1967-ből (2.1.3. Tétel) (Wong, 1967) és Detki tétele (2.2.5. Tétel) (Detki, 1976) egymástól függetlenek. A $c(x)=c_1(x)+c_2(x)$ jelölés bevezetése mellett, tekintsük a következő példákat.

2.2.1. Példa. *Legyen* $c_1(x)=1+x^4$ és $c_2(x)=\sin x^5$. *A megadott függvények csupán a (2.2) feltételt elégítik ki, míg a (2.7) és (2.15) feltételeket nem teljesítik.*

2.2.2. Példa. *Legyen* $c_1(x)=1+x^2$ és $c_2(x)=\sin x$. *A megadott függvények csak a (2.15) feltételt elégítik ki, míg a (2.2) és (2.7) feltételeket nem teljesítik.*

2.2.3. Példa. *Legyen* $c_1(x)=1+x+\dfrac{1}{x+1}$ *és* $c_2(x)=-x$. *Most a megadott függvények a (2.7) feltételt elégítik ki, míg a (2.2) és (2.15) feltételeket nem.*

A fenti példákból az a következtetés vonható le, hogy a (2.2), (2.7) és (2.15) feltételek valóban egymástól függetlenek, de mégis van valami hasonlatosság Opial tétele (2.1.1. Tétel) és a 2.2.5. Tétel, valamint Wong tétele (2.1.3. Tétel) és a 2.2.5. Tétel között, s ezeket az összefüggéseket az alábbi példák illusztrálják.

2.2.4. Példa. *Az* $y''+(x+1)y=0$ *egyenlet esetén, Opial tétele teljesül, amennyiben* $c_1(x)=x+1$, $c_2(x)=0$, *a 2.2.5. Tétel viszont* $c_1(x)=x$, $c_2(x)=1$ *vagy* $c_1(x)=x+1$, $c_2(x)=0$ *esetén teljesül.*

2.2.5. Példa. *Az* $y''+y=0$ *egyenletet tekintve, Wong tétele teljesül, amennyiben* $c(x)=1$, $c'(x)=0$ *és* $g(y)=y$, *a 2.2.5. Tétel viszont* $c_1(x)=1$, $c_2(x)=0$ *és* $g(y)=y$ *esetén teljesül.*

Tekintsük az

(2.16) $$y'' + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y^{2i+1} = 0$$

másodrendű homogén nemlineáris egyenletet. A következő állítás a (2.16) egyenlet megoldásainak korlátosságára ad feltételt, és ez az eredmény független Bihari (2.1.2. Tétel) eredményétől.

2.2.6. Tétel. [(Detki, 1976), (Detki, 1987)] *Legyen* c_i, $i = 1,2,\ldots,n$, *a* $[0,\infty)$ *intervallumon pozitív, folytonosan differenciálható függvény és*

$$F(x) = \min_{i=1}^{n}\left[c_i(x)\right] \geq \alpha > 0,\ H(x) = \max_{i=1}^{n}\left[c_i(x)\right] \geq 0.\ \textit{Ha} \int_0^\infty \frac{H(t)}{F(t)}dt < \infty,$$

akkor a (2.16) differenciálegyenlet minden megoldása korlátos a $[0,\infty)$ *intervallumon.*

2.2.6. Példa. *Tekintsük az* $y'' + \left(1+e^{-x}\right)y + \sum_{i=1}^{n} y^{2i+1} = 0$ *egyenletet. Itt* $F(x)=1$, $H(x)=0$ *esetén teljesülnek a 2.2.6. Tétel feltételei, míg a Bihari-féle (2.1.2. Tétel) feltételei nem teljesülnek.*

A továbbiakban tekintsük a

(2.17) $$y'' + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) g_i(y) h_i(y') = f(x)$$

differenciálegyenletet, amelyre a következő állítás látható be.

2.2.7. Tétel. [(Detki, 1976)] *Legyen* c_i, *a* $[0,\infty)$ *intervallumon pozitív differenciálható függvény,* g_i *a* $(-\infty,\infty)$ *intervallumon folytonos függvény, olyan, hogy* $\operatorname{sgn} g_i(u) = \operatorname{sgn} u$, h_i *a* $(-\infty,\infty)$ *intervallumon pozitív folytonos függvény,* $i=1,2,\ldots,n$, *valamint legyen* f *a* $[0,\infty)$ *intervallumon folytonos függvény. Ha van olyan* $k>0$ *szám, hogy minden* $i=1,2,\ldots,n$ *és* $x \in [0,\infty)$ *esetén* $k \leq \frac{h_i(x)}{q(x)}$, *ahol* $q(x) = \max_{1\leq i\leq n} h_i(x)$, *valamint*

(2.18) $$\lim_{|u|\to\infty} G_i(u) = \lim_{|u|\to\infty} \int_0^u g_i(s)ds = \infty,\ \lim_{|u|\to\infty} H(u) = \lim_{|u|\to\infty} \int_0^u \frac{s}{q(s)}ds = \infty \ \textit{és}$$

$$c_i(x) \geq \alpha > 0,\ \left|\frac{u}{q(u)}\right| \leq K,\ x \in [0,\infty),\ \int_0^\infty |c_i(s)|ds < \infty,\ \int_0^\infty |f(s)|ds < \infty,$$

akkor a (2.17) differenciálegyenlet minden megoldása korlátos a $[0,\infty)$ *intervallumon.*

Összehasonlítva ezt az eredményt Wong eredményével (2.1.4. Tétel), azt állapíthatjuk meg, hogy található közös vonás bennük, amit a következő példákkal illusztrálunk.

2.2.7. Példa. *Az* $y''+\frac{1}{1+y'^2}\left[(x+1)g_1(y)+g_2(y)\right]=0$ *egyenletre alkalmazható Wong eredménye (2.1.4. Tétel), Detki tétele (2.2.7. Tétel) pedig abban az esetben, ha nem zárjuk ki (2.18)-ot.*

2.2.8. Példa. *Az* $y''+(x+1)g_3(y)+\frac{1}{1+y'^2}g_4(y)=0$ *differenciálegyenletre Wong eredménye (2.1.4. Tétel) nem alkalmazható, Detki tétele (2.2.7. Tétel) pedig igen.*

Graef és Spikes $\left(r(x)y'\right)'+c(x)g(y)h(y')=f(x)$ differenciálegyenletre vonatkozó eredményét (2.1.6. Tétel) és Detki tételét (2.2.7. Tétel) összehasonlítva az $n=1$ esetben, a következő példákon keresztül tudjuk kimutatni a közöttük levő viszonyt.

2.2.9. Példa. *Az* $y''+\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)y\left(y'^2+1\right)=\frac{1}{x^2}$, $x\geq 1$ *differenciálegyenletre Detki tétele (2.2.7. Tétel) alkalmazható az* $n=1$ *esetben, Graef és Spikes eredménye (2.1.6. Tétel) pedig nem, mert*

$$K_0\geq 1+\frac{\cos x}{x}\geq k_0>0 \quad \textit{és} \quad \int_{x_0}^{\infty}\left[\frac{c'_-(x)}{c(x)}\right]dx\geq\infty .$$

2.2.10. Példa. *Az* $y''+(1+x)y\left(y'^2+1\right)=\frac{1}{x^2}$ *differenciálegyenletre nem alkalmazható Detki tétele (2.2.7. Tétel), Graef és Spikes eredménye (2.1.6. Tétel) pedig igen.*

2.2.11. Példa. *Az* $y''+\left(1+\frac{1}{x}\right)y\left(y'^2+1\right)=\frac{1}{x^2}$ *differenciálegyenletre alkalmazható Detki tétele (2.2.7. Tétel), valamint Graef és Spikes eredménye (2.1.6. Tétel) is.*

Burton és Grimmer tanulmányozták az $\left(r(x)y'\right)'+c(x)g(y)h(y')=0$ egyenletet, s most az ő eredményüket (2.1.5. Tétel) hasonlítjuk össze Detki tételével (2.2.7. Tétel).

2.2.12. Példa. *Ha*

$$f(t)=\begin{cases} 2^n t-2^n n, & \text{ha } t\in\left[n,n+\frac{1}{2^n}\right] \\ -2^n t+2^n\left(n+\frac{1}{2^{n-1}}\right), & \text{ha } t\in\left[n+\frac{1}{2^n},n+\frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ 0, & \text{ha } t\in\left[n+\frac{1}{2^{n-1}},n+1\right] \end{cases}$$

$n=1,2,3,\dots$, *akkor teljesülnek Burton és Grimmer tételének (2.1.5. Tétel) feltételei, de Detki tételének (2.2.7. Tétel) feltételei nem.*

2.2.13. Példa. *Ha*

$$f(t)=\begin{cases} 2t-n, & \text{ha } t\in\left[n,n+\frac{1}{2}\right] \\ -2t+2(n+1), & \text{ha } t\in\left[n+\frac{1}{2},n+1\right] \end{cases}$$

$n=1,2,3,\dots$, *akkor Burton és Grimmer tételének (2.1.5. Tétel) feltételei nem teljesülnek, de Detki tételének (2.2.7. Tétel) feltételei igen.*

2.2.14. Példa. *Ha*

$$f(t)=\begin{cases} \frac{1}{2^{n-2}}t-\frac{1}{2^{2n-1}}\left(2^n-1\right), & \text{ha } t\in\left[2^n-1,2^n+2^{n-1}-1\right] \\ -\frac{1}{2^{2n-2}}t+\frac{1}{2^{2n-2}}\left(2^{n+1}-1\right), & \text{ha } t\in\left[2^n+2^{n+1}-1,2^{n+1}-1\right] \end{cases}$$

$n=1,2,3,\dots$, *akkor Burton és Grimmer tételének (2.1.5. Tétel) és Detki tételének (2.2.7. Tétel) feltételei is teljesülnek.*

Differenciálegyenlet-rendszerek megoldásainak vizsgálatával például Bellman is foglalkozott (Bellman 1943). Most Demidovich egy differenciálegyenlet rendszerekre vonatkozó eredményének általánosítása következik (Demidovich, 1951), s e célból nézzük a

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx}=P(x)\mathbf{Y}+R(x,\mathbf{Y}) \tag{2.19}$$

differenciálegyenlet-rendszert, amelyre belátható a következő állítás.

2.2.8. Tétel. [(Detki, 1976), (Detki, 1985b)] *Legyen P olyan $n\times n$-es mátrixfüggvény, amely integrálható a $[0,\infty)$ intervallumon, továbbá $\left\|R\left(x,\mathbf{Y}(x)\right)\right\|\le f(x)g\left(\left\|\mathbf{Y}(x)\right\|\right)$, ahol f a $[0,\infty)$ intervallumon folytonos, monoton növekvő függvény, $g(0)>0$, g pozitív, monoton növekvő függvény, amelyre igaz, hogy (2.6) teljesül. Ekkor a (2.19) differenciálegyenlet rendszer minden monoton megoldása korlátos.*

Tekintsük a (2.4) nemlineáris differenciálegyenletet. Érvényes a következő állítás, amely Wintner eredményének, (Wintner, 1950), általánosítása.

2.2.9. Tétel. [(Detki, 1974), (Detki, 1976)] *Legyen* c *a* $[0,\infty)$ *intervallumon folytonos függvény,* g *pedig a* $(-\infty,\infty)$ *intervallumon folytonosan differenciálható függvény, amelyre igaz, hogy* $g(0)=0$, $g'(u)\geq 0$ *és* $g'(0)>0$. *Ha* $\int_0^\infty t^3 c^2(t)dt<\infty$, *akkor a (2.4) egyenletnek nincs olyan* $y(x)$ *megoldása a* $[0,\infty)$ *intervallumon, hogy*

$$\int_0^\infty g^2(y(t))dt<\infty .$$

A $g(y)=y$ esetben Wintner tételét (2.1.7. Tétel) kapjuk.

A Bellman által igazolt (2.1.8. Tétel) állításhoz hasonló állítást mondunk ki a következő tételben. Hasonlítsuk össze a (2.21) differenciálegyenlet megoldásait az

(2.20) $$y''+c(x)y+g(x,y)=0$$

differenciálegyenlet megoldásaival. Érvényes a következő tétel.

2.2.10. Tétel. [(Detki, 1974), (Detki, 1976)] *Legyen az*

(2.21) $$y''+c(x)y=0$$

differenciálegyenlet minden megoldása négyzetesen integrálható a $[0,\infty)$ *intervallumon. Legyen továbbá* $c(x)$ *a* $[0,\infty)$ *intervallumon folytonos függvény,* $g(x,y)$ *olyan folytonos függvény* $x\in[0,\infty)$ *és* $y\in(-\infty,\infty)$ *esetén, hogy létezzenek olyan* h_1 *és* h_2 *folytonos függvények a* $[0,\infty)$ *intervallumon, hogy* h_1 *négyzetesen integrálható,* h_2 *korlátos és* $g^2(x,y)\leq h_1^2(x)+h_2^2(x)y^2$.

Ekkor a (2.20) egyenlet minden megoldása négyzetesen integrálható $[0,\infty)$*-en.*

A következőkben késleltetett argumentumú differenciálegyenleteket vizsgálunk. Elsőként tekintsük az

(2.22) $$y''+c(x)g(y(\tau))=0$$

nemlineáris másodrendű késleltetett argumentumú differenciálegyenletet, ahol $\tau(x)=x-\Delta x$, $0\leq\Delta x\in C[x_0,\infty)$,

$$\lim_{x\to\infty}\tau(x)=\infty,\ \tau'(x)\geq\alpha>0,\ x\in[x_0,\infty).$$

A bemutatott tételek Kamenev eredményét, (Kamenev, 1970a), általánosítják.

2.2.11. Tétel. [(Detki, 1990a)] *Legyen* $c \in C[x_0,\infty)$, $c(x) \geq 0 \quad x \in [x_0,\infty)$ *esetén,* $g \in C^1(-\infty,\infty)$, $ug(u) > 0$ $g'(u) > 0$ *minden* u *-ra, valamint* $0 < \psi(x) \in C[x_0,\infty)$ *és*

$$\int^{\infty} \frac{\psi(\tau(x))\Theta\left(k\int_{x_0}^{x}\psi(\tau(s))ds\right)}{\int_{x_0}^{x}\psi^2(\tau(s))ds}dx = \infty .$$

Legyen $\Theta(x) \geq 0$ *egy olyan nemcsökkenő folytonos függvény* $x \geq 0$ *-ra, amelyre igaz, hogy*

$$\int^{\infty} \frac{\Theta(x)}{x^2}dx < \infty .$$

Ekkor, ha $\lim\limits_{x\to\infty} A_\psi(t) = \infty$, *ahol* $A_\psi(t) = \dfrac{\int_{x_0}^{x} c(s)\int_{x_0}^{s}\psi(\tau(u))duds}{\int_{x_0}^{x}\psi(\tau(s))ds}$,

akkor a (2.22) differenciálegyenletnek nincs monoton megoldása.

2.2.12. Tétel. [(Detki, 1990a)] *Legyen* $c \in C[x_0,\infty)$ *és* $c(x) \geq 0 \quad x \in [x_0,\infty)$ *-re,* $0 < \rho(x) \in C^1[x_0,\infty)$, $\rho'(x) \leq 0$ *nemcsökkenő,* $0 < \psi(\tau(x)) \in C[x_0,\infty)$, $\psi(\tau(x)) \neq 0$, $\rho(x)\psi(\tau(x))$ *nemcsökkenő és*

$$A_{\rho,\psi}(t) = \frac{\int_{x_0}^{x} c(s)\rho(s)\int_{x_0}^{s}\psi(\tau(u))duds}{\int_{x_0}^{x}\psi(\tau(s))ds},$$

valamint $g \in C^1(-\infty,\infty)$, $ug(u) > 0$ *és* $g'(u) > 0$ *minden* u *-ra,*

(2.23) $$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{du}{g(u)} < \infty,\ \int_{-\varepsilon}^{-\infty}\frac{du}{g(u)} < \infty,\ \int_{0}^{\varepsilon}\frac{du}{g(u)} < \infty,\ \int_{0}^{-\varepsilon}\frac{du}{g(u)} < \infty,\ \varepsilon > 0.$$

Ha $\varphi(y) = \int_0^y \frac{du}{g(u)} > 0$ *minden* y *-ra, akkor a*

(2.24) $$\limsup_{x\to\infty} A_{\rho,\psi}(t) = \infty$$

teljesüléséből következik, hogy a (2.22) differenciálegyenletnek nincs monoton megoldása.

2.2.13. Tétel. [(Detki, 1990a)] *Ha a* g *függvény teljesíti a (2.23) feltételt, valamint a* ρ' *és a* $\rho(x)\psi(\tau(x))$ *függvények abszolút folytonosak, míg*

$$\int_0^\infty |\rho''(t)|\,dt < \infty\,,\quad \int_0^\infty \left|\left[\rho(t)\psi(\tau(t))\right]'\right| dt < \infty$$

akkor a (2.24) feltétel szükséges ahhoz, hogy a (2.22) differenciálegyenletnek ne legyen monoton megoldása.

Az

(2.25) $$\left[r(x)y'\right]' + c(x)g(y(\tau(x))) = 0$$

nemlineáris másodrendű késleltetett idejű differenciálegyenletre vonatkozó eredményével zárjuk Detki tételeinek felsorolását. Az itt következő tételben Onose (Onose, 1970) és Kamenev (Kamenev, 1970b) eredményeinek általánosítása kerül megfogalmazásra.

2.2.14. Tétel. [(Detki, 1990b)] *Legyen* $0 < r(x) \in C^1[x_0,\infty)$, $c \in C[x_0,\infty)$, $g \in C^1[(-\infty,0)\cup(0,\infty))]$, $ug(u) > 0$, $u \neq 0$ *és* $g'(u) \geq 0$, $0 < \rho(x) \in C^2[x_0,\infty)$ *olyan függvény, hogy*

$$\int^\infty \rho(\tau(x))c(x)dx = \infty\,,\quad \int^\infty \frac{dx}{\rho(\tau(x))c(x)} = \infty\,.$$

Tegyük fel továbbá, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \tau(x) = \infty$, $\tau'(x) \geq \alpha > 0$, $x \in [x_0,\infty)$*-ra, valamint a* g *függvény teljesíti a (2.23) feltételt* $\varepsilon > 0$*-ra, és hogy*

$$\rho'(\tau(x)) \geq 0\,,\ R'(x) \leq 0 \quad \textit{vagy} \quad \rho'(\tau(x)) \leq 0\,,\ R'(x) \geq 0 \quad \textit{vagy} \quad \int^\infty |R'(u)|du < \infty\,,$$

ahol $R(x) = r(x)\rho'(\tau(x))\tau'(x)$ *bármelyikének teljesülése biztosítja azt, hogy a (2.25) differenciálegyenletnek nem létezik monoton megoldása.*

3. ZÁRÓ KÖVETKEZTETÉSEK

Detki József a Szabadkai Építőmérnöki Kar első doktori fokozattal rendelkező matematikatanára volt, s ugyanakkor meghatározó alakja a Karon folyó matematikaoktatásnak, hiszen az általa létrehozott matematikai tantárgyak programjai ma is időszerűek. Jelentős szerep jutott neki a magyar nyelvű oktatás tradíciójának kialakításában. Bemutatott tudományos cikkei, amelyek a másodrendű nemlineáris differenciálegyenletek témakörébe tartoznak, ma is megtalálhatóak a szakirodalomban. Hivatkozásokat a (Detki, 1974), (Detki, 1990a) és (Detki, 1990b) cikkek esetében találtunk. A (Detki, 1974) cikk eredményeit 1978-ban Wyrwińska, (Wyrwińska, 1978), majd 1981-ben Eliás (Eliás, 1979) általánosította, valamint 2004-ben Mustafa és Rogovchenko idézte munkáiban (Mustafa és Rogovchenko, 2004a), (Mustafa és Rogovchenko, 2004b). Ez annál inkább érdekes, mivel a (Detki, 1974) publikációban található eredmények a korai munkái közé tartoznak.

Marvin Pešić és Rogovchenko 2018-ban írt munkájukban, (Pešić és Rogovchenko, 2018), általánosították Detki eredményeit (Detki, 1990a), (Detki, 1990b).

4. DETKI JÓZSEF CIKKEI ÉS TANKÖNYVEI

Detki J. (1973): The oscillation of the solutions of a certain nonlinear second order differential equation. (Russian) *Mathematica Balkanica* 3, 65-71.

Detki J. (1974): The solvability of a certain second order nonlinear ordinary differential equation in $L^p[0,\infty)$. *Mathematica Balkanica* 4, 115-119.

Detki J. (1976): Ispitivanje ponašanja rešenja obične nelinearne diferencijalne jednačine drugog reda. *Doktorska disertacija*, Novi Sad.

Detki J. (1981): A remark on the oscillation of ordinary second order differential equations. *Mat. Vesnik* 5(18)(33), no.2, 149-150.

Detki J. (1984): Egy integrálkritérium másodrendű nemlineáris differenciálegyenlet megoldásának oszcillálására. *BAM* 221/XXXII, 212–232.

Detki J., Tumbas J. (1984): O oscilatornosti rešenja jedne klase nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda. *BAM* 227/XXXII, 163-166.

Detki J. (1985a): Nemlineáris másodrendű differenciálegyenlet megoldásainak korlátossága. *BAM* XXXIX, 27–33.

Detki J. (1985b): Lösungbeschränkheit der nichtlinearen Differentialgleichung-systeme. *BAM* XXXVII, 69-73.

Detki J. (1986a): On the boundedness of solutions of second order nonlinear differential equations. *BAM* XLI, 356-374.

Detki J. (1986b): About the oscillation of the solutions of system consisting of two differential equations. *BAM* XLI, 215-223.

Detki J. (1986c): Some sufficient conditions for the oscillation of the solutions of certain differential equations. *BAM* XLII, 382-400.

Detki J. (1987): About the boundedness and square integrability of the solutions of some types of nonlinear differential equations of second order. *BAM* XLV, 31-41.

Detki J., Engi Zs., Milojević K., Varju Gy. (1988): About some more important irregular functions used in mechanics. *BAM* LI, 257-267.

Detki J., Engi Zs., Péics H. (1990): Greenove funkcije – *stručni rad*. Građevinski fakultet Subotica

Detki J., Péics H. (1991a): Über die Beschränktheit der Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen. *BAM* LVII, 101-106.

Detki J., Péics H. (1991b): Beschränktheits- und Oszillationsbedingungen von Lösungen gewisser nichtlinearen Differentialgleichungstypen zweiter Ordnung. *BAM* LVIII, 45-52.

Detki J. (1990a): Criteria for monotone solutions of some second-order differential equations with deviating arguments. *Proceedings of the Second International Mathematical Miniconference*, Part I (Budapest, 1988). *Periodica Polytech. Transportation Engrg.* 18, no.1-2, 119-126.

Detki J. (1990b): On the monotone solutions of second-order nonlinear differential equations with deviating arguments. *Proceedings of the Second International Mathematical Miniconference*, Part I (Budapest, 1988). *Periodica Polytech. Transportation Engrg.* 18, no.1-2, 111-117.

Detki J., Engi Zs., Péics H. (1994): Bessel equations and functions. *BAM* LXXI, 237-247.

Detki J., Ferenci F. (1982): Matematika I – *udžbenik*. Subotica: Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski Fakultet.

Detki J. (1984k): Matematika II – *udžbenik*. Subotica: Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski Fakultet.

Gajin S., Detki J., Orlov-Gajin V. (1982): Contribution to solve a boundary problem for irregular functions applied in the mechanics of structures. *BAM* XXV, 137-144.

Orlov-Gajin V., Detki J., Gajin S., Mester Gy. (1984): Beurteilung der Beschränktheit der Lösung für eine Gleichung der Oszillationstheorie, *BAM* XXXII, 53-59.

5. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A tanulmány megírásához szükséges kutatást Péics Hajnalka számára a Szerbiai Oktatási és Tudományügyi Minisztérium támogatta (projekt III44006).

IRODALOMJEGYZÉK

Atkinson F. V. (1955): On second-order non-linear oscillations. *Pacific J. Math.* 5, 643-647.

Bellman R. E. (1943): The stability of solutions of linear differential equations. *Duke Math. J.* 10, 643-647.

Bellman R. E. (1953): Stability theory of differential equations. New York - Toronto - London: *McGraw-Hill Book Co.*

Bihari I. (1961): On the nonlinear equation $u»+a(t)u+q(t)f(u^2)=0$. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 6, 287-291.

Burton T. A., Grimmer R. C. (1970): Stability properties of $(r(t)u')'+a(t)f(u)g(u')=0$. *Monatsh. Math.* 74, 211-222.

Demidovich B. P. (1951): On stability in the sense of Lyapunov of a linear system of ordinary differential equations. *Mat. Sbornik N. S.* 28(70), 659-684.

Eliás J. (1979): On the solutions of nth order differential equation in $L\sp{2}(0,\infty)$. *Qualitative theory of differential equations*, Vol. I,II (Szeged), 181-191.

Graef J. R., Spikes P. W. (1975): Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation. *J. Differential Equations* 17, 461-476.

Hartman P. (1952): On non-oscillatory linear differential equations of second order. *Amer. J. Math.* 74, 389-400.

Kamenev I. V. (1969): Oscillation of solutions of second order nonlinear equations, *Mat. Zametki* 5, 125-136.

Kamenev I. V. (1970a): A certain test for the oscillation of the solutions of a second order ordinary differential equation. (Russian), *Mat. Zametki* 8, 773-776.

Kamenev I. V. (1970b): The oscillatoriness of the solutions of a second order nonlinear equation with a sign-variable coefficient. (Russian) *Differencial'nye Uravnenija* 8(6), 1718-1721

Kamenev I. V. (1971): Certain specifically nonlinear oscillation theorems. (Russian), *Mat. Zametki* 10, 129-134.

Kamenev I. V. (1973): A certain specific nonlinear oscillation theorem. (Russian) *Differencial'nye Uravnenija* 9, 574-576.

Kamenev I. V. (1977): On the question of the oscillation of the solutions of a second order differential equation with an «integrally small» coefficient. (Russian) *Differencial'nye Uravnenija* 13, 2141-2148.

Kiguradze I. T. (1962): The capability of certain solutions of ordinary differential equations to oscillate. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk* SSSR 144, 33-36

Myshkis A. D. (1972): Linear differential equations with retarded argument. (Russian) *Moscow: Izdat. «Nauka»*, 352 pp.

Mustafa O. G., Rogovchenko Y. V. (2004a): Limit-point type solutions of nonlinear differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* 294, 548-559.

Mustafa O. G., Rogovchenko Y. V. (2004b): Limit-point criteria for superlinear differential equations. *Bull. Belg. Math. Soc.* 11, 431-440.

Onose H. (1970): Oscillation theorems for nonlinear second order differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 26, 461-464.

Opial Z. (1959): Nouvelles remarques sur l'équation différentielle $u»+a(t)u=0$. (French) *Ann. Polon. Math.* 6, 75-81.

Pešić M., Rogovchenko Y. V. (2018): Global non-monotonicity of solutions to nonlinear second-order differential equations. *Mediterr. J. Math.* 15, no. 2, Art.30, 17 pp.

Rab M. (1959): Kriterien für die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung $(p(x) y')'+q(x)y=0$. (German) *Časopis Pěst. Mat.* 84, 335-370.

Wintner A. (1949): A criterion of oscillatory stability. *Quart. Appl. Math.* 7, 115-117.

Wintner A. (1950): A criterion for the nonexistence of L^p-solutions of a nonoscillatory differential equations. *J. London Math. Soc.* 25, 347-351.

Wong J. S. W., Burton T. A. (1965): Some properties of solutions of $u»(t)+a(t)f(u)g(u')=0$. *II. Monatsh. Math.* 69, 368-374.

Wong J. S. W. (1967): Boundedness theorems for solutions of $u»(t)+a(t)f(u)g(u')=0$, (IV) *Enseignement Math.* 2(13), 157-165.

Wyrwińska A. (1978): On the existence and non-existence of solutions of certai second order nonlinear differential equations in the class $L\sb{2}$. *Fasc. Math.* 10, 77-84.

Zlamal M. (1950): Oscillation criterions, *Časopis Pěst. Mat. Fys.* 75, 213-218.