ECOLOGICA, Vol. 30, No 109 (2023), 59-66
https://doi.org/10.18485/ecologica.2023.30.109.9
Originalni naučni rad
UDC: 573.3:519.87

Novi pristup dinamičkoj analizi kompeticionog Lotka-Voltera modela: novi indikatori stabilnosti

A New Approach to Dynamical Analysis of Competitive Lotka-Volterra Model: New Stability Indicators

Dragana Lj. Cvetković

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Srbija /
University of Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Serbia

e-mail: draganacvet@uns.ac.rs

orcid.org/0000-0002-6070-278X

Rad primljen / Received: 01.11.2022, Rad prihvaćen / Accepted: 09.02.2023

Sažetak: Indikatori stabilnosti neprekidnih dinamičkih sistema invarijantnih u vremenu, pa i kompeticionog Lotka-Voltera modela, uglavnom se u literaturi baziraju na analizi spektra odgovarajuće community matrice. To, međutim, ima dva osnovna nedostatka. Prvo, sa stanovišta računarske efikasnosti, za sisteme velikih dimenzija, kakvi su neophodni za realan opis posmatranog ekosistema, izračunavanje karakterističnih korena, samo da bi se videla njihova pozicija u kompleksnoj ravni je preskupo. Drugo, mnogo važnije i što je već konstatovano u ekološkoj literaturi, postoji osetljivost matematičkog opisa stabilnosti u terminima spektra matrica, pa je spektar nedovoljan da se razume fenomen nestabilnost-kompleksnost, čije razumevanje leži u osnovi, kako modeliranja sistema životne sredine, tako i razvoja održivih strategija za njihovo očuvanje i obnovu. Stoga je neophodno razviti napredniju metodologiju opisa dinamičke stabilnosti u terminima intraspecifične kompeticije funkcionalnih grupa, prvenstveno imajući u vidu kratkoročno ponašanje usled funkcionalnih promena, što matematički odgovara idejama vezanim za pseudospektar matrica. U ovom radu prezentovani su novi indikatori stabilnosti, koji su (do sad nepublikovani) originalni deo doktorske disertacije autora.

Ključne reči: dinamički sistem, Lotka-Voltera model, stabilnost, robusna stabilnost, pseudospektar.

Abstract: In the literature, stability indicators for continuous time invariant dynamic systems, including the competitive Lotka-Volterra model, are mostly based on the spectrum analysis of the corresponding community matrix. This, however, has two fundamental drawbacks. First, from the point of view of computational efficiency, for systems of large dimensions, necessary for a realistic description of the observed ecosystem, the calculation of eigenvalues, just to see their position in the complex plane, is too expensive. Second, and much more important, what has already been noted in the ecological literature, there is the sensitivity of the mathematical description of stability in terms of the matrix spectrum, so the spectrum itself is insufficient to understand the phenomenon of instability-complexity, the understanding of which is the basis of both the modeling of environmental systems and development sustainable strategies for their preservation and restoration. Therefore, it is necessary to develop a more advanced methodology for describing dynamic stability in terms of intraspecific competition of functional groups, primarily taking into account short-term behavior due to functional changes, which mathematically corresponds to the ideas related to matrix pseudospectrum. In this paper, new stability indicators, which are the (so far unpublished) original part of the author's doctoral dissertation, are presented.

Keywords: Dynamical system, Lotka-Volterra model, Stability, Robust stability, Pseudospectrum.

UVOD / INTRODUCTION

Svi modeli predatorstva baziraju se na ideji da su stope rasta populacija i predatora i plena funkcije veličine obe populacije. Ako u određenom staništu živi samo jedna vrsta plena i samo jedna vrsta predatora i ako sa x(t) označimo veličinu populacije plena, a sa y(t) veličinu populacije predatora u momentu t, onda je rast ovih rivalskih populacija opisan sistemom diferencijalnih jednačina:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = gx - cxy \\ \frac{dy}{dt} = -by + kcxy \end{cases}$$

gde su g, c, b, k nenegativne konstante, i to:

- g je stopa rasta populacije plena u odsustvu predatora,
- cy je stopa mortaliteta populacije plena prouzrokovana predatorstvom,
- b je stopa smrtnosti populacije predatora čiji je uzrok izvan sistema (ne zavisi od broja jedinki plena),
- k je efikasnost kojom predator konzumiranu hranu pretvara u populacioni rast.

Kompeticioni Lotka-Voltera model uvažava i postojanje kompeticije/takmičenja za resurse (hrana, prostor, polni partner, itd.). Taj odnos je negativan za obe populacije - i za plen i za predatora, te se uvodi novi faktor $c_x x^2$ koji opisuje unutrašnju (intraspecifičnu) kompeticiju plena za ograničenim životnim prostorom i njegovim resursima i, analogno, $c_y y^2$ koji opisuje unutrašnju (intraspecifičnu) kompeticiju predatora prilikom lova svog plena. Dakle, kompeticioni Lotka-Voltera model izgledaće ovako:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = gx - cxy - c_x x^2 \\ \frac{dy}{dt} = -by + kcxy - c_y y^2 \end{cases}$$

Ovaj model generalizovan na više promenljivih biće predmet razmatranja u ovom radu. Napomenimo da je on izveden nezavisno i u sledećim oblastima:

- ekologija (Lotka 1925, Volterra 1926)
  x: plen, y: predator,
- epidemiologija (Kermak i McKendrick 1927, 1932, 1933)
  x: osetljive jedinke, y: zaražene jedinke,
- teorija sagorevanja (Semenov 1935)
  x i y su hemijski radikali koji se formiraju tokom H_2O_2 sagorevanja,
- ekonomija (Galbraith 2006)
  x: stanovništvo, y: predatorska institucija,

kao i u brojnim studijama iz drugih disciplina.

S obzirom da je matematička teorija dinamičkih sistema u potpunosti motivisana modeliranjem fizičkih i energetskih procesa, jedan od osnovnih fokusa je postojanje ravnotežnih stanja, kao i njihove specifične osobine, na osnovu kojih se može steći uvid u osobine realnih procesa koji se ispituju. Ta (moguće brojna) stanja dinamičkog sistema mogu imati različita dinamička svojstva. Naime, ako se sistem malo pomeri iz ravnotežnog stanja, može se desiti da:

- teži da se vrati u to stanje ili
- teži da napusti to stanje ili
- je u tom pogledu neutralan.

Prvi slučaj, koji, u suštini, predstavlja svojstvo neosetljivosti ekvilibrijuma dinamičkog sistema na male promene stanja, naziva se *stabilnost*.

U terminima populacione dinamike, pitanje stabilnosti, zapravo, znači sledeće: da li, kada je ravnoteža jednom uspostavljena, mala promena u populacijama čini da se sistem vrati (brže ili sporije, sa ili bez oscilacija, itd.) u narušenu ravnotežu, ili je, pak, ravnoteža takva da jednom kada se i malo naruši, ne može da se povrati. Očigledno, ovo pitanje je jedno od ključnih pitanja u oblasti očuvanja životne sredine. Kako što bolje ispitati osetljivost ravnoteže jednog ekosistema, a potom i kako uticati da se ta ravnoteža povrati, jeste jedan od modernih izazova nauke. Upravo iz tih razloga, ovaj rad se bavi nalaženjem novih alata koji, na osnovu elemenata *community matrice*, mogu unapred dati potvrdan odgovor o stabilnosti posmatranog sistema.

1. STABILNOST DINAMIČKOG SISTEMA / STABILITY OF A DYNAMIC SYSTEM

Koncepti stabilnosti ekoloških sistema razvijani su na više različitih načina (McCann, 2000). Uglavnom je njihovo značenje fokusirano na sposobnost sistema da se, u prisustvu perturbacija, održi ili da se vrati u ravnotežno stanje, u smislu sastava vrsta i veličine populacije.

Matematičke definicije stabilnosti su često zahtevnije od onih koje bismo mogli bazirati na posmatranjima, pod datim pretpostavkama i u datom kontekstu. Sa druge strane, sam pojam stabilnosti, onako kako ga je uveo Ljapunov, često nije dovoljan pokazatelj, jer podrazumeva prolazak kroz stanja koja mogu biti nedopustiva za dati realni ekosistem.

Zbog toga je, svakako, izazov kako da izaberemo okvir, koji će obuhvatiti dovoljno biološkog realizma i kompleksnosti, a istovremeno biti pogodan, kako za empirijsku, tako i za matematičku analizu.

Dobro je poznato sa za nelinearne, invarijantne u vremenu, dinamičke sisteme (*Time Invariant Dynamical Systems* ili skraćeno TIDS), zaključak o stabilnosti odgovarajućeg linearnog TIDS (LTIDS) određenog *Jakobijanom* (*Community matricom*), možemo preneti na zaključak o lokalnoj asimptotskoj stabilnosti datog nelinearnog TIDS. Stoga ćemo u ovom delu, radi jednostavnijeg zapisa, diskutovati stabilnost *linearnog TIDS,* dakle, dinamičkog sistema čija je upravljajuća funkcija linearna:

$$x(t) = A\dot{x(t)}\,, \qquad t \geq 0.$$

Stanja sistema koja prate ovakvu zakonitost imaju oblik

$$x(t) = e^{tA}x(0).$$

Asimptotska stabilnost / Asymptotic stability

Da bismo ocenili ekološku stabilnost, umesto da koristimo samo asimptotsku stabilnost, kao što je to uobičajeno, mi ćemo je adaptirati u drugačiji koncept stabilnosti, koji uključuje oba, i kratkoročno i dugoročno kvadratno (euklidska norma) ili maksimalno (max norma) odstupanje od ekvilibrijuma, koje se bazira na funkciji evolucije

$$\phi_A(t) = \|e^{tA}\|\,, \qquad t \geq 0.$$

koja zavisi od izabrane norme $\|\cdot\|$. Grafik ove krive se u literaturi naziva još i *amplifikacioni omotač* dinamičkog sistema.

Vreme povratka i rezilijentnost / Recovery time and resilience

Iako je matematička stabilnost, u smislu Ljapunova, veoma informativna o dinamičkim svojstvima ravnotežnih stanja realnih procesa, često je neophodno doći do finijih zaključaka koji su izvan dometa ovog, u svojoj suštini, asimptotskog koncepta. Jedan od faktora koji je relevantan u ovom smislu je takozvano *vreme povratka* u ravnotežno stanje.

Najkraće vreme, koje je neophodno da se početni poremećaj ravnoteže (perturbacija ekvilibrijuma) smanji ispod $e^{-1} \approx 37\%$, u nekoj meri (vektorskoj normi) naziva se *vreme povratka*. S obzirom da o lokalnoj asimptotskoj stabilnosti nelinearnog TIDS zaključujemo na osnovu (globalne) stabilnosti linearnog TIDS određenog Jakobijanom A, vreme povratka (*return time*) u zadatoj vektorskoj normi $\|\cdot\|_v$ ovde definišemo kao

$$t_A^{v,RT} = min\left\{t > 0 : \max_{x(0)\neq x^*} \frac{\|x(t) - x^*\|_v}{\|x(0) - x^*\|_v} \leq e^{-1}\right\},$$

pri čemu smo sa x* označili tačku ravnoteže.

Pored ove definicije vremena povratka, koja je vezana za određenu normu u kojoj merimo poremećaj, postoji još i vreme povratka invarijantno u odnosu na normu (*norm invariant return time*):

$$t_A^{NIRT} = min\{t_A^{v,RT} > 0 : \|\cdot\|_v \; je\ vektorska\ norma\}.$$

Naglasimo da je, za realne procese, vreme povratka od ključnog značaja, jer, za razliku od matematičkih apstrakcija, u realnim okolnostima vremenska skala igra osnovnu ulogu. U terminima ekosistema, vrlo je diskutabilno da li jedno ravnotežno (Ljapunov asimptotski) stabilno stanje, čije je vreme povratka par stotina ili hiljada godina, možemo uopšte smatrati stabilnim u ekološkim terminima. Na primer, ako nekom sistemu tla treba par vekova da povrati mali poremećaj ravnotežne raspodele biomase po funkcionalnim grupama organizama, čiji je period razmnožavanja mnogo kraći od godine dana, teško da možemo zaključiti da je takva ravnoteža tog ekosistema stabilna u realnim terminima.

Na osnovu ovog koncepta vremena povratka, u literaturi je razvijen poznati pokazatelj lokalne/ globalne stabilnosti nelinearnog/linearnog TIDS koji se naziva *rezilijentnost*, odnosno *otpornost*. Rezilijentnost TIDS se definiše kao recipročna vrednost vremena povratka. Ovde ćemo je označiti sa ρ_A:

$$\rho_A = \frac{1}{t_A^{NIRT}}$$

U slučaju kada (L)TIDS nije asimptotski stabilan, smatraćemo t_A^{NIRT} beskonačnim, pa tada smatramo da je rezilijentnost jednaka nuli. Drugim rečima, sistem nije otporan. Ovako definisan pokazatelj kvantifikuje koliko je ravnoteža nekog (L)TIDS asimptotski stabilna. Što je rezilijentnost ravnoteže sistema veća, to je ona stabilnija, čime se omogućava adekvatnija procena stabilnosti ravnoteže realnog procesa koji je tim sistemom modelovan.

Tranziciono ponašanje i reaktivnost / Transition behavior and reactivity

Kao što smo videli, jedan od načina da profinimo razumevanje stabilnosti dinamičkih sistema jeste korišćenje pojma rezilijentnosti, koji je povezan sa vremenom povratka u stanje ravnoteže nakon poremećaja ravnotežnog stanja. Međutim, postoji i drugi faktor koji isto tako može biti limitiran, kao što je limitirana vremenska skala u kojoj se odvijaju fizički procesi. Naime, asimptotska stabilnost, a time i rezilijentnost, govore samo o povratku u ravnotežno stanje, pri tome ne pružajući nikakvu informaciju o ponašanju sistema u međuvremenu.

Ponašanje TIDS, od trenutka t = 0, kada je sistem nekim uticajem izveden iz stanja ravnoteže x* u stanje x(0), sve do vremena njegovog povratka t_A^{NIRT} u tačku ravnoteže, naziva se *tranziciono ponašanje*. Dakle, pre nego što se ispolji asimptotska stabilnost, funkcija evolucije datog sistema može proći kroz faze, moguće i kritičnog, rasta, tj. amplifikacije.

Posledice ovakvog ponašanja su vrlo konkretne u slučaju realnih procesa. U kontekstu populacionih modela, jasno je da svaki ekosistem ima određeni maksimalan broj jedinki određene populacije, koje može podneti bez gubitka svog integriteta. Drugim rečima, dinamički sistem kojim modelujemo realan ekosistem implicitno pretpostavlja da se broj jedinki, odnosno biomasa ili njena gustina, kreću unutar maksimalnih mogućih vrednosti karakterističnih za svaku od populacija. Ove veličine se u literaturi često nazivaju i realni nosivi kapaciteti sistema.

Ukoliko je asimptotski stabilan dinamički sistem takav da njegova funkcija evolucije, u datoj ravnotežnoj tački, mora da prođe kroz amplifikaciju takvu da se mali početni poremećaj ravnoteže toliko pojača, da prevazilazi realni nosivi kapacitet sistema, tada, iako će se dinamički sistem u kasnijoj fazi vratiti u blizinu ravnotežne tačke, integritet realnog ekosistema je već narušen, te stoga nije smisleno smatrati takvu ravnotežu ekološki stabilnom.

Drugim rečima, rezilijentnost nije sama po sebi dovoljno dobar pokazatelj stabilnosti u njenom realističnom smislu. Iz tog razloga se obično posmatra i jedno drugo dinamičko svojstvo ravnotežne tačke, koje je konzervativnije od rezilijentnosti. Ono se naziva *reaktivnost* i predstvalja maksimalnu početnu stopu odstupanja od ravnotežne tačke dinamičkog sistema. Za TIDS to, konkrentije, znači početnu stopu rasta (ili opadanja) funkcije evolucije u određenoj normi.

Prema tome, *reaktivnost*, koju ćemo označavati sa ν_A, predstavlja nagib tangente na amplifikacioni omotač u tački t = 0. Zato za ekvilibrijum TIDS za koji je reaktivnost nenegativna kažemo da je reaktivan, jer se početna perturbacija ravnoteže najpre pojačava (ili eventualno ostaje ista). Nasuprot tome, ukoliko ekvilibrijum ima negativnu reaktivnost, tada se početna perturbacija ravnoteže odmah smanjuje, pa kažemo da je takav ekvilibrijum nereaktivan.

Prema (Hinrichsen, Pritchard, 2005), reaktivnost se u slučaju TIDS svodi na minimalni eksponent inicijalnog rasta, tj.

$$\nu_A = min\{K > 0 :\ \|x(t) - x^*\| \leq e^{Kt}\},$$

tako da je, očigledno, svaki nereaktivan ekvilibrijum TIDS ujedno i (lokalno) asimptotski stabilan. Dakle, nereaktivnost ravnoteže TIDS je zahtevnija osobina od stabilnosti, jer podrazumeva da se smanjenje poremećaja odmah ispoljava i to bez mogućeg tranzicionog ponašanja.

Dok je rezilijentnost invarijantna u odnosu na korišćenu normu u kojoj merimo poremećaje, reaktivnost zavisi od posmatrane norme, tj. zavisi od načina merenja perturbacije. Tako jedan sistem, na primer, u maksimum normi može biti reaktivan, dok je u euklidskoj normi nereaktivan.

Konačno, iako asimptotski stabilno ravnotežno stanje može biti reaktivno, to ne mora automatski da znači da će funkcija evolucije proći kroz kritičnu fazu pojačanja početne perturbacije. Drugim rečima, kako bismo na adekvatan način opisali ekološku stabilnost, potrebno je često pronaći zlatnu sredinu između nereaktivnosti, koja je prekonzervativna, i rezilijentnosti, koja je, pak, previše slab zahtev.

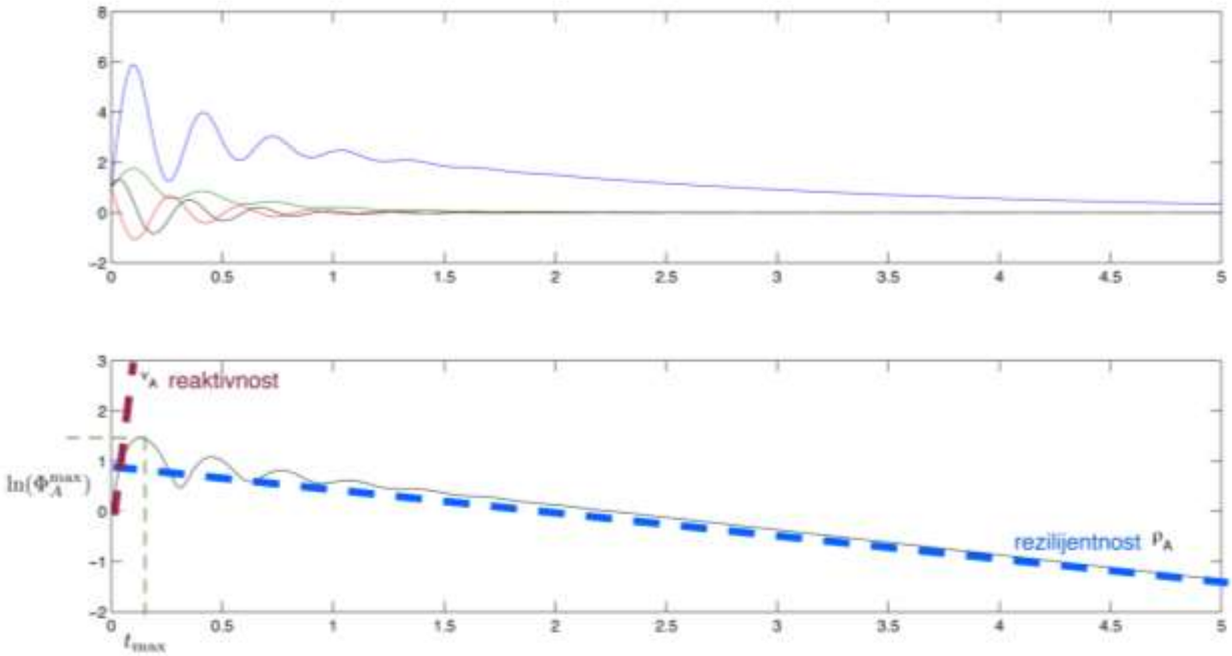
U tu svrhu, kao značajan pokazatelj tranzicionog ponašanja, može se posmatrati maksimalna amplifikacija, kao i vreme u kome je dostignuta. Kao što joj ime kaže, maksimalna amplifikacija je najveći mogući faktor kojim se neka početna perturbacija može pojačati. Označavamo je sa ϕ_A^{max} i definišemo sa

$$\phi_A^{max} = \max_{t\geq 0} \max_{x(0)\neq x^*} \frac{\|x(t) - x^*\|}{\|x(0) - x^*\|},$$

što se za LTIDS svodi na

$$\phi_A^{max} = \max_{t\geq 0} \phi_A(t).$$

Svi pomenuti pokazatelji dinamičkih osobina ravnotežnih stanja (L)TIDS su ilustrovani na Slici 1. Slede njihove matematičke osobine.



Slika 1. Ilustracija trajektorije LTIDS od n = 4 komponente. Gore je prikaz sve četiri komponente, a dole je prikazana funkcija evolucije u euklidskoj normi na logaritamskoj vertikalnoj skali, na kojoj su označeni i reaktivnost, maksimalna amplifikacija, vreme njenog dostizanja i rezilijentnost

2. INDIKATORI PONAŠANJA DINAMIČKOG SISTEMA / DYNAMIC SYSTEM BEHAVIOR INDICATORS

Radi jednostavnijeg zapisa, diskutovaćemo stabilnost *LTIDS,* dakle, dinamičkog sistema čija je upravljajuća funkcija linearna:

$$x(t) = Ax(\dot{t}), \qquad t \geq 0.$$

Stanja sistema koja prate ovakvu zakonitost imaju oblik

$$x(t) = e^{tA}x(0).$$

Ako pretpostavimo da je matrica A regularna, tj. da je ravnotežna tačka jedinstveno određena, tada je jedini ekvilibrijum nula i njegova dinamička svojstva su u potpunosti određena ponašanjem funkcije evolucije

$$\phi_A(t) = \|e^{tA}\|\,, \quad t \geq 0.$$

U nastavku ćemo navesti kako se za ponašanje funkcije evolucije mogu koristiti odgovarajuće matrične osobine, što je već poznato u literaturi, a zatim ćemo prezentovati alternativni pristup koji je nastao tokom rada na disertaciji (Cvetković, 2017).

Asimptotska stabilnost. Spektar / Asymptotic stability. Spectrum

Jedan od najčešće korišćenih alata linearne algebre u razmatranju (asimptotske) stabilnosti jeste *spektar* matrice (označavamo ga sa $\Lambda(A)$), odnosno skup svih njenih karakterističnih korena. U slučaju *normalnih* matrica, tj. matrica koje komutiraju sa svojim hermitovanim matricama, tada, za za svako početno stanje x(0) trajektorija linearnog TIDS ima komponente, čija je osobina:

$$\lim_{t\to\infty}|x_k(t)| = C_k \lim_{t\to\infty} e^{\alpha_A t}, \qquad k = 1,2,\dots,n,$$

gde su C_k konstante, a α_A je maksimalni realni deo karakterističnih korena matrice A i naziva se *spektralna apscisa.* Za euklidsku vektorsku normu važi

$$\phi_A(t) = \|e^{tA}\|_2 = e^{\alpha_A t}, \qquad t > 0.$$

Očigledno, ako je α_A negativna veličina, posmatrana ravnotežna tačka (nula) linearnog TIDS je eksponencijalno stabilna.

Slično tvrđenje važi i u slučaju matrica koje nisu normalne i to je činjenica dobro poznata u literaturi: stabilnost (asimptotska = eksponencijalna) ravnotežnog stanja (nule) linearnog TIDS u potpunosti je određena spektrom matrice, preciznije, spektralnom apscisom. Ili, forma u kojoj se to najčešće navodi: ako je ceo spektar matrice u levoj otvorenoj kompleksnoj poluravni, ravnotežno stanje linearnog TIDS je asimptotski stabilno.

Ekološka stabilnost - tranziciono ponašanje. Pseudospektar / Ecological stability - transitional behavior. Pseudospectrum

Generalno govoreći, karakteristični koreni matrica u mnogim slučajevima daju odličan uvid u dinamičke osobine posmatranih sistema. Međutim, to nije uvek slučaj, vidi (Trefethen, Embree, 2005). U slučaju kada je matrica normalna, evoluciona funkcija u euklidskoj normi je, zapravo, eksponencijalna funkcija sa stopom određenom spektralnom apscisom, pa, dakle karakteristični koreni u potpunosti objašnjavaju dinamička svojstva - ne samo asimptotska.

Međutim, ukoliko matrica A nije normalna, evoluciona funkcija može imati vrlo različito ponašanje, pre nego što se ispolji asimptotika. Postavlja se pitanje *koja osobina matrice* je ta koja može objasniti to tranziciono ponašanje. Odgovor je - *pseudospektar*.

Pođimo od činjenice da, posmatrano sa stanovišta primenjene matematike, pitanje: *Da li je A singularna matrica?* često nema puno smisla. Naime, proizvoljno mala perturbacija matrice može promeniti odgovor na to pitanje iz pozitivnog u negativan. S obzirom da se pitanje: *Da li je λ karakteristični koren matrice A?* može ekvivalentno postaviti u obliku: *Da li je λE − A singularna matrica*? i tu nailazimo na isti problem. Stoga je potrebno preformulisati ovo pitanje tako da uzmemo u obzir osetljivost na perturbacije matrice A.

U terminima LTIDS, ovog puta ne posmatramo perturbacije ravnotežnog stanja dinamičkog sistema, već perturbacije upravljajućih zakonitosti! Na primeru populacionih modela, to znači da pored poremećaja u brojnosti pojedinih populacija želimo da tretiramo i poremećaje odnosa između populacija. Svakako, u realnim procesima koji nas interesuju takvi poremećaji ne samo da su mogući, već su, zapravo, od ključnog interesa.

Najjednostavnije rečeno, ε−pseudospektar $\Lambda_\varepsilon(A)$ je skup kompleksnih brojeva koji su karakteristični koreni neke perturbovane matrice $A + \Delta$, sa osobinom da je $\|\Delta\| < \varepsilon$. Povećanjem parametra ε, počev od $\varepsilon = 0$, $\Lambda_\varepsilon(A)$ u kompleksnoj ravni narasta iz spektra $\Lambda(A)$ u sve širi i širi skup. Pseudospektar, osim od parametra ε, očigledno, zavisi i od izbora norme, što praktično znači da će se ε−pseudospektar na različite načine širiti, u zavisnosti od načina na koji merimo perturbacije matrice A.

Vratimo se sada na osnovno pitanje koje je i motivisalo upotrebu pseudospektra: *Zašto postoji tranziciono ponašanje evolutivne funkcije kod matrica koje nisu normalne*?

Odgovor na ovo pitanje krije se u čuvenom tvrđenju, poznatom pod nazivom Krajsova matrična teorema, koja je, znatno kasnije, upotpunjena radom Spajkera. Ovde nećemo navoditi samu teoremu, zadržaćemo se samo na konstataciji da Krajsova konstanta $K(A)$ predstavlja procenu maksimalne amplifikacije funkcije evolucije, jer je

$$K(A) \leq \phi_A^{max} = \max_{t\geq 0}\|e^{tA}\| \leq enK(A),$$

a da se može računati kao

$$K(A) = \sup_{\varepsilon>0}\frac{\alpha_A^\varepsilon}{\varepsilon}$$

gde je α_A^ε *$\varepsilon-$pseudospektralna apscisa* matrice A, tj. realni deo tačke pseudospektra koja se nalazi najviše desno:

$$\alpha_A^\varepsilon := \max\{Re(z) : z \in \Lambda_\varepsilon(A)\}.$$

Stoga možemo zaključiti da amplifikacija početne perturbacije ravnotežnog stanja zavisi od brzine kojom se ε−pseudospektar propagira u desnu poluravan kompleksne ravni. Pri tome, što su karakteristični koreni matrice osetljiviji na perturbacije u samoj matrici A, to će se više početna perturbacija ekvilibrijuma takvog LTIDS pojačati.

Prokomentarišimo, kratko, razliku između normalnih i ne-normalnih matrica, i to tako što ćemo se fokusirati na slučaj euklidske norme. Lako se pokazuje da je za normalnu matricu A, ε−pseudospektar zapravo unija otvorenih ε−lopti oko tačaka spektra matrice (karakterističnih korena), kao i da je Krajsova konstanta, ukoliko je ograničena, jednaka 1. To znači da LTIDS, čija je matrica normalna, nema tranziciono ponašanje, maksimalna amplifikacija je jednaka 1 i postiže se u nultom vremenu t = 0. Ukoliko matrica nije normalna, Krajsova konstanta veća je od 1, pa na osnovu Krajs-Spajker teoreme, mora postojati tranzicinono ponašanje, tj. tranzicioni rast. Takođe, napomenimo da maksimalna amplifikacija može dostizati i vrednosti koje su prilično velike.

Ono što je posebno interesantno, sa stanovišta ovog rada, jeste da su upravo populacioni modeli ti koji produkuju matrice koje su daleko od normalnih. Drugim rečima, kod populacione dinamike se očekuje traniziciono ponašanje, te je primena pseudospektra pri ispitivanju njene stabilnosti neophodna, i to, kako za utvrđivanje stabilnosti koja je robusna u odnosu na matrične perturbacije, ograničene u datoj normi parametrom ε > 0, tako i za ispitivanje maksimalne amplifikacije evolucione funkcije.

Ekološka stabilnost - reaktivnost. Matrična mera / Environmental stability - reactivity. Matrix measure

Do sada smo videli da je asimptotsko ponašanje funkcije evolucije određeno spektralnom apscisom, dok je maksimalna amplifikacija tokom tranzicionog ponašanja određena propagacijom pseudospektralne apscise.

Matrična osobina koja će moći da objasni reaktivnost je *matrična mera*.

Podsetimo se, reaktivnost LTIDS u datoj matričnoj normi ‖ · ‖ je definisana kao nagib tangente na amplifikacioni omotač u početnom stanju, što je, prema definiciji izvoda, ekvivalentno sa

$$\nu_A = \lim_{t\searrow 0^+}\frac{\|E+tA\|-1}{t}.$$

Upravo ovaj izraz je u literaturi poznat kao matrična mera ili logaritamska matrična norma. Ono što je interesatno jeste da ova matrična mera, u specifičnim slučajevima maksimum norme i euklidske norme, takođe predstavlja apscisu određenih skupova u kompleksnoj ravni koji sadrže spektar matrice (slično kao što je to bio slučaj i sa pseudospektrom). Upravo zbog činjenice da ti skupovi sadrže spektar matrice, poznati su pod imenom *lokalizacione oblasti* spektra, a nazivaju se još i *lokalizacije* karakterističnih korena.

Geršgorinova apscisa

Prva i najpoznatija lokalizaciona oblast koju ovde navodimo jeste Geršgorinov skup. Za datu kvadratnu matricu A reda n, Geršgorinov skup $\Gamma(A)$ je skup u kompleksnoj ravni dobijen unijom n krugova, sa centrima u dijagonalnim elementima matrice A, dok su poluprečnici određeni sumom modula odgovarajućih vandijagonalnih elemenata:

$$\Lambda(A) \subset \Gamma(A) = \bigcup_{i=1}^{n}\Gamma_i(A),$$

$$\Gamma_i(A) := \left\{z \in C : |z-a_{ii}| \leq \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}.$$

Ako je u izrazu za reaktivnost posmatrana norma maksimum norma, tj. ‖·‖ = ‖·‖$_\infty$, tada je

$$\nu_A^\infty = \lim_{t\searrow 0^+}\frac{\|E+tA\|_\infty - 1}{t}$$
$$= \lim_{t\searrow 0^+}\frac{\max_k\{|1+ta_{kk}|-1+t\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\}}{t}$$

pa dobijamo

$$\nu_A^\infty = \max_k\left\{Re(a_{kk}) + \sum_{j\neq k}|a_{kj}|\right\},$$

što znači da se reaktivnost u ovom slučaju poklapa sa apscisom Geršgorinovog skupa matrice A, koju, shodno tome, nazivamo *Geršgorinova apscisa*. Označimo je sa γ_A.

Primetimo da se, za razliku od spektralne apscise i pseudospektralne apscise, Geršgorinova apscisa izračunava daleko jednostavnije, odnosno numerički je izrazito „jeftina“ karakteristika ponašanja evolucione funkcije.

Primetimo, takođe, da, isto kao što je položaj spektra u otvorenoj levoj poluravni kompleksne ravni bio karakterizacija eksponencijalne stabilnosti LTIDS (odnosno pozitivne rezilijentnosti), tako je takav položaj Geršgorinovog skupa karakterizacija nereaktivnosti LTIDS u maksimum normi.

Numerička apscisa

Jedna drugačija lokalizacija karakterističnih korena date matrice A je *numerički raspon* (numerical range)

$$W(A)=\left\{\frac{x^H A x}{x^H x} : x\in C^n, x\neq 0\right\}.$$

Ovaj lokalizacioni skup karakterističnih korena matrice poznat je još i pod nazivom *polje vrednosti* (field of values) i izučavan je dosta, upravo zbog svoje veze sa dinamičkim svojstvima karakterističnih korena matrica.

Ako je u izrazu za reaktivnost posmatrana norma euklidska norma, tj. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, tada je, vidi (Hinrichsen, Pritchard, 2005, Posledica 5.5.26),

$$\nu_A^{(2)} = max\left\{\lambda : \lambda\in\Lambda\left(\frac{A+A^H}{2}\right)\right\}$$

$$= max\{Re(z) : z\in W(A)\}.$$

Dakle, reaktivnost u ovom slučaju poklapa se sa apscisom numeričkog raspona matrice A, koju, shodno tome, nazivamo *numerička apscisa* i označavamo sa ω_A.

Ova karakteristika je nešto lakša za izračunavanje nego što je to rezilijentnost, iz prostog razloga što je sam problem izračunavanja karakterističnih korena matrica lakši i numerički "jeftiniji" u slučajevima kada je matrica Hermitska. Međutim, sa druge strane, to je i dalje daleko složeniji postupak nego određivanje Geršgorinove apscise.

Slično prethodnom slučaju, položaj numeričkog raspona u otvorenoj levoj poluravni kompleksne ravni karakterizacija je nereaktivnosti LTIDS u euklidskoj normi.

Robusna stabilnost. Lokalizacije pseudospektra / Robust stability. Localization of the pseudospectrum

U radu (Kostić i dr., 2016) dato je nekoliko lokalizacija pseudospektra, ovde ćemo navesti samo po jednu za pseudospektar u maksimum normi i u euklidskoj normi, jer su njihove apscise jednako numerički „jeftine", kao i Geršgorinova.

Za proizvoljnu matricu A, $\varepsilon-$pseudospektar $\Lambda_\varepsilon(A)$ u maksimum normi sadržan je u $\varepsilon-$Geršgorinovom skupu $\Gamma_\varepsilon(A)$:

$$\Lambda_\varepsilon(\mathrm{A})\subset\Gamma_\varepsilon(A)=\bigcup_{i=1}^{n}\Gamma_{i,\varepsilon}(A),$$

$$\Gamma_{i,\varepsilon}(A) := \left\{z\in C : |z-a_{ii}|\leq\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\varepsilon\right\},$$

a $\varepsilon-$pseudospektar $\Lambda_\varepsilon(A)$ u euklidskoj normi sadržan je u euklidskom $\varepsilon-$Geršgorinovom skupu $\hat{\Gamma}_\varepsilon(A)$:

$$\Lambda_\varepsilon(\mathrm{A})\subset\hat{\Gamma}_\varepsilon(A)=\bigcup_{i=1}^{n}\hat{\Gamma}_{i,\varepsilon}(A),$$

$$\hat{\Gamma}_{i,\varepsilon}(A) := \left\{z\in C : |z-a_{ii}| \leq max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}|\right\}+\varepsilon\right\}.$$

I ostale lokalizacije Geršgorinovog tipa za spektar proizvoljne matrice (koje su u bliskoj vezi sa posebnim potklasama H-matrica) pogodne su za izvođenje analognih lokalizacija pseudospektra, za više detalja čitaoca upućujemo na (Kostić i dr., 2021; Cvetković i dr, 2021; Šanca i dr, 2018). Ovde se zadržavamo samo na najjednostavnijima, jer nam je cilj da izložimo samo *osnovni princip* nalaženja robusnih indikatora stabilnosti.

ZAKLJUČAK / CONCLUSION

Do sada je koncept stabilnosti nelinearnog dinamičkog sistema TIDS (kakvi su gotovo svi realni modeli) uglavnom podrazumevao lokalnu asimptotsku stabilnost, koja, u stvari, znači stabilnost odgovarajućeg linearnog sistema LTIDS, određenog Jakobijanom (community matricom) u tački ravnoteže. Međutim, ispostavlja se da to nije dovoljno. Naime, lokalna asimptotska stabilnost nikako ne znači i ekološku stabilnost, jer asimptotska stabilnost govori samo o povratku u ravnotežno stanje, pri tome ne pružajući nikakvu informaciju o ponašanju sistema u međuvremenu. Ukoliko je asimptotski stabilan dinamički sistem takav da mora da prođe kroz fazu u kojoj se mali početni poremećaj ravnoteže toliko pojača, da prevazilazi realni nosivi kapacitet sistema, tada, iako će se dinamički sistem u kasnijoj fazi vratiti u blizinu ravnotežne tačke, integritet realnog ekosistema je već narušen, te stoga nije smisleno smatrati takvu ravnotežu ekološki stabilnom. Zbog toga je, osim rezilijentnosti (koja je pokazatelj asimptotske stabilnosti i recipročna je vremenu povratka u ravnotežu), neophodno posmatrati još jedno dinamičko svojstvo ravnotežne tačke - reaktivnost, koja predstavlja početnu stopu rasta (ili opadanja) funkcije evolucije u određenoj normi. Matematički alat za utvrđivanje ovih dinamičkih svojstava vezan je za spektar matrice i njegove lokalizacije.

Generalno govoreći, spektar matrica u mnogim slučajevima daje odličan uvid u dinamičke osobine samih matrica, ali ponekad ne daje dovoljno informacija za rešavanje problema na koje možemo naići. U slučaju kada je matrica posmatranog LTIDS normalna, karakteristični koreni u potpunosti objašnjavaju dinamička svojstva - ne samo asimptotska. Međutim, ukoliko matrica nije normalna, evoluciona funkcija može imati vrlo različito ponašanje, pre nego što se ispolji asimptotika. Na pitanje koja osobina matrice je ta koja može objasniti to tranziciono ponašanje, odgovor je pseudospektar. U terminima LTIDS, to znači da ne posmatramo perturbacije ravnotežnog stanja dinamičkog sistema, već perturbacije upravljajućih zakonitosti!

Ovakav pristup proučavanju stabilnosti potpuno je nov, upravo zato što smo koristili teoriju pseudospektra umesto klasičnog spektra.

U Tabeli 1 data je karakterizacija osobina LTIDS datog matricom A na osnovu pozicije odgovarajućeg skupa u levoj poluravni kompleksne ravni, što je kvanitifikovano njegovom apscisom.

Tabela 1. Karakterizacija osobina LTIDS datog matricom A na osnovu pozicije odgovarajućeg skupa u levoj poluravni kompleksne ravni, što je kvanitifikovano njegovom apscisom

Osobina LTIDS datog matricom A	**Skup**	**Apscisa**
eksponencijalna stabilnost	spektar $\Lambda(A)$	α_A
nereaktivnost u maksimum normi	Geršgorinov skup $\Gamma(A)$	γ_A
nereaktivnost u euklidskoj normi	numerički raspon $W(A)$	ω_A
ε-robusna eksponencijalna stabilnost	ε-pseudospektar $\Lambda_\varepsilon(A)$	α_A^ε
ε-robusna nereaktivnost u maksimum normi	ε-Geršgorinov skup $\Gamma_\varepsilon(A)$	$\gamma_A + \varepsilon$
ε-robusna nereaktivnost u euklidskoj normi	ε-numerički raspon $\mathrm{W(A)} + \zeta_\varepsilon$	$\omega_A + \varepsilon$

Zahvalnica

Ovaj rad finansijski je podržan od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije (Projekat broj 451-03-68/2022-14/200156).

LITERATURA / REFERENCES

[1] Cvetković, D. Lj. (2017). *Novi indikatori stabilnosti za empirijske trofičke mreže*. Doktorska disertacija. Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu.

[2] Cvetković, D. Lj., Cvetković Lj., Li C.-Q. (2021). CKV-type matrices with applications. *Linear Algebra and its Applications*, 608, 158-184.

[3] Hinrichsen, D., Pritchard, A. J. (2005). Mathematical Systems Theory I - Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg.

[4] Kostić, V. R., Cvetković, Lj., Cvetković, D. Lj. (2016). Pseudospectra localizations and their applications. *Numerical Linear Algebra with Applications,* 23(2), 356-372.

[5] Kostić, V. R., Cvetković, Lj., Šanca, E. (2021). From pseudospectra of diagonal blocks to pseudospectrum of a full matrix. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 386, 113265.

[6] McCann, K. S. (2000). The diversity–stability debate. *Nature*, 405, 228-233.

[7] Šanca, E., Kostić, V. R., Cvetković, Lj. (2018). Fractional pseudospectra and their localizations. *Linear Algebra and its Applications*, 559, 244-269.

[8] Trefethen, L.N., Embree, M. (2005). *Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*. Princeton University Press.